Augmentation de la connexité entre noeuds et zones

Z. Szigeti

G-SCOP
SCIENCES POUR LA CONCEPTION, L'OPTIMISATION ET LA PRODUCTION

En collaboration avec Roland Grappe

Plan d'exposé

Problèmes d'augmentation de connexité connus

dans un graphe non orienté, en ajoutant des arêtes.

- Augmentation de l'arête-connexité globale (Watanabe, Nakamura),
- Augmentation de l'arête-connexité globale sous contraintes de partition (Bang-Jensen, Gabow, Jordán, Szigeti),
- Augmentation de l'arête-connexité locale (Frank),
- **Avec des coûts sur les arêtes :** ces problèmes sont **NP-complet**.

Problèmes d'augmentation de connexité connus

dans un graphe non orienté, en ajoutant des arêtes.

- Augmentation de l'arête-connexité globale (Watanabe, Nakamura),
- Augmentation de l'arête-connexité globale sous contraintes de partition (Bang-Jensen, Gabow, Jordán, Szigeti),
- Augmentation de l'arête-connexité locale (Frank),
- **Avec des coûts sur les arêtes :** ces problèmes sont **NP-complet**.

Problèmes d'augmentation de connexité connus

dans un graphe non orienté, en ajoutant des arêtes.

- Augmentation de l'arête-connexité globale (Watanabe, Nakamura),
- Augmentation de l'arête-connexité globale sous contraintes de partition (Bang-Jensen, Gabow, Jordán, Szigeti),
- Augmentation de l'arête-connexité locale (Frank),
- **Avec des coûts sur les arêtes :** ces problèmes sont **NP-complet**.

Problèmes d'augmentation de connexité connus

dans un graphe non orienté, en ajoutant des arêtes.

- Augmentation de l'arête-connexité globale (Watanabe, Nakamura),
- Augmentation de l'arête-connexité globale sous contraintes de partition (Bang-Jensen, Gabow, Jordán, Szigeti),
- Augmentation de l'arête-connexité locale (Frank),
- **Avec des coûts sur les arêtes :** ces problèmes sont **NP-complet**.

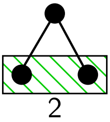
Problèmes d'augmentation de connexité connus

dans un graphe non orienté, en ajoutant des arêtes.

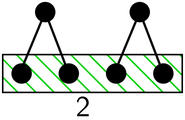
- Augmentation de l'arête-connexité globale (Watanabe, Nakamura),
- Augmentation de l'arête-connexité globale sous contraintes de partition (Bang-Jensen, Gabow, Jordán, Szigeti),
- Augmentation de l'arête-connexité locale (Frank),
- **Avec des coûts sur les arêtes :** ces problèmes sont **NP-complet**.

Un autre problème : entre **noeuds** et **zones**.

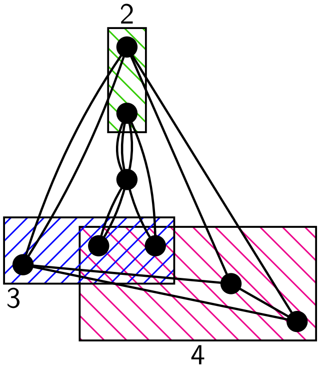
Exemples de graphes connectés entre noeuds et zones



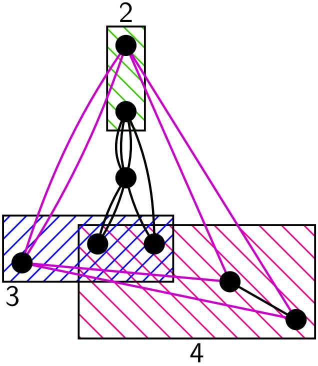
Exemples de graphes connectés entre noeuds et zones



Exemples de graphes connectés entre noeuds et zones



Exemples de graphes connectés entre noeuds et zones



Formulation du problème

Augmentation de la connexité entre noeuds et zones

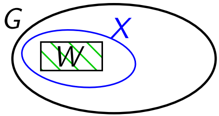
- $G = (V, E)$ un graphe,
- $\mathcal{W}$ un ensemble de sous-ensembles de V (les zones),
- $r : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{N}$.

Trouver un ensemble d'arêtes H de taille minimum tel que dans $G + H$, il y ait $r(W)$ chaînes arête-disjointes entre toute zone W et tout sommet $v \notin W$.

Reformulation en termes de coupes

Condition de coupe (Menger)

$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \max\{\mathbf{r}(\mathbf{W}), \mathbf{W} \in \mathcal{W}, \mathbf{W} \subseteq \mathbf{X} \text{ ou } \mathbf{W} \cap \mathbf{X} = \emptyset\}$.
Trouver H de taille minimum tel que $\forall X \subset V$, $\mathbf{d_{G+H}}(\mathbf{X}) \geq \mathbf{R}(\mathbf{X})$.

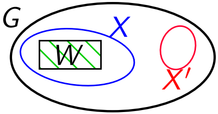


Reformulation en termes de coupes

Condition de coupe (Menger)

$\mathbf{R(X)} = \max\{\mathbf{r(W)}, \mathbf{W} \in \mathcal{W}, \mathbf{W} \subseteq \mathbf{X} \text{ ou } \mathbf{W} \cap \mathbf{X} = \emptyset\}$.

Trouver H de taille minimum tel que $\forall X \subset V$, $\mathbf{d_{G+H}(X)} \geq \mathbf{R(X)}$.



Propriétés de R

R est symétrique **semi-monotone**.

$\forall X \subset V$, $R(X) \leq R(X')$:

- soit $\forall X' \subseteq X$,
- soit $\forall X' \subseteq V - X$.

Cas particuliers

Un cas NP-complet

I : G, $\mathcal{W}$, $r : \mathcal{W} \to \{0, 1\}$.

Q : Trouver H minimal tel que $G + H$ vérifie la **condition de coupe**.

Cas particuliers

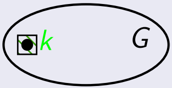
Un cas NP-complet

I : G, $\mathcal{W}$, $r : \mathcal{W} \rightarrow \{0, 1\}$.

Q : Trouver H minimal tel que $G + H$ vérifie la **condition de coupe**.

Un cas connu

Généralisation de l'augmentation de l'**arête-connexité globale**.



Notre problème : $\mathbf{R(X) \neq 1}, \forall X \subset V$

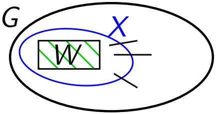


FIGURE : $\gamma = \max\{\sum_{X \in \mathcal{X}} (R(X) - d(X)) : \mathcal{X}$ sous-partition de $V\}$

Notre problème : $\mathbf{R(X) \neq 1}, \forall X \subset V$

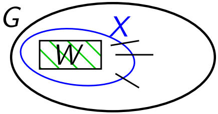


FIGURE : $\gamma = \max\{\sum_{X \in \mathcal{X}}(R(X) - d(X)) : \mathcal{X}$ sous-partition de $V\}$

Théorème minmax (Ishii, Hagiwara)

- $\lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$ est une **borne inférieure** du nombre d'arêtes d'une bonne augmentation,
- pour certains graphes, il faut **une arête de plus**,
- **caratérisation** de ces graphes.

Notre problème : $\mathbf{R(X) \neq 1}, \forall X \subset V$

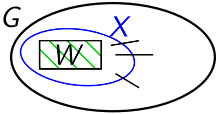


FIGURE : $\gamma = \max\{\sum_{X \in \mathcal{X}}(R(X) - d(X)) : \mathcal{X}$ sous-partition de $V\}$

Théorème minmax (Ishii, Hagiwara)

- $\lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$ est une **borne inférieure** du nombre d'arêtes d'une bonne augmentation,
- pour certains graphes, il faut **une arête de plus**,
- **caratérisation** de ces graphes.

Notre problème : $\mathbf{R(X) \neq 1}, \forall X \subset V$

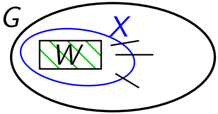


FIGURE : $\gamma = \max\{\sum_{X \in \mathcal{X}} (R(X) - d(X)) : \mathcal{X}$ sous-partition de $V\}$

Théorème minmax (Ishii, Hagiwara)

- $\lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$ est une **borne inférieure** du nombre d'arêtes d'une bonne augmentation,
- pour certains graphes, il faut **une arête de plus**,
- **caratérisation** de ces graphes.

Notre problème : $\mathbf{R(X) \neq 1}, \forall X \subset V$

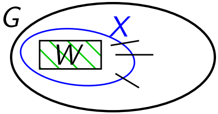
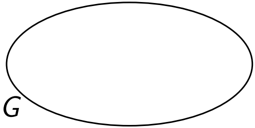


FIGURE : $\gamma = \max\{\sum_{X \in \mathcal{X}}(R(X) - d(X)) : \mathcal{X}$ sous-partition de $V\}$

Théorème minmax (Ishii, Hagiwara)

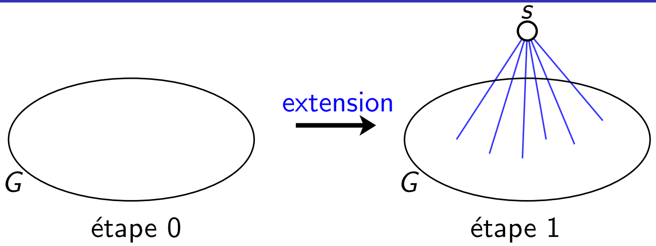
- $\lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$ est une **borne inférieure** du nombre d'arêtes d'une bonne augmentation,
- pour certains graphes, il faut **une arête de plus**,
- **caratérisation** de ces graphes.

Problème d'augmentation de connexité : marche à suivre

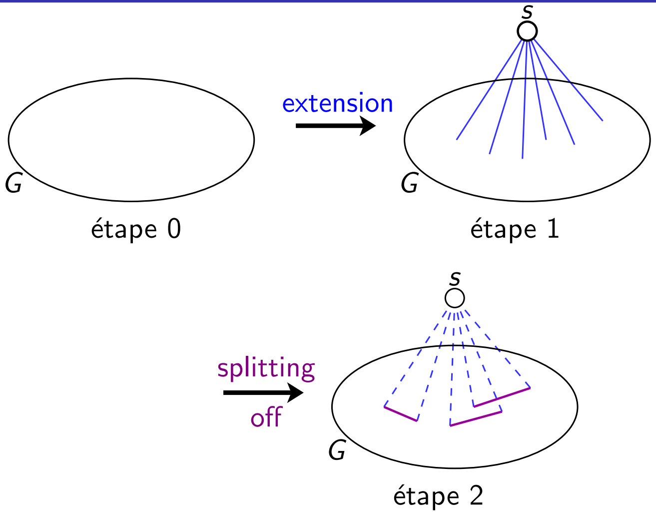


étape 0

Problème d'augmentation de connexité : marche à suivre



Problème d'augmentation de connexité : marche à suivre



Etape 1 : extension du graphe

Étendre un graphe $G = (V, E)$:

- **ajouter** un nouveau sommet s,
- **ajouter** un ensemble de nouvelles arêtes F de taille minimum reliant s et V telles que $\mathbf{d_{G+F}(X) \geq R(X)}$, $\forall X \subset V$ (**condition de coupe**),
- Si $d_{G+F}(s)$ est **impair**, **ajouter** encore une arête entre s et V.

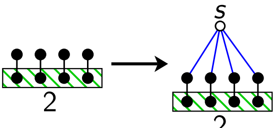


FIGURE : Exemple avec une zone de valeur 2

Etape 1 : extension du graphe

Étendre un graphe $G = (V, E)$:

- **ajouter** un nouveau sommet s,
- **ajouter** un ensemble de nouvelles arêtes F de taille minimum reliant s et V telles que $\mathbf{d_{G+F}(X) \geq R(X)}$, $\forall X \subset V$ (**condition de coupe**),
- Si $d_{G+F}(s)$ est **impair**, **ajouter** encore une arête entre s et V.

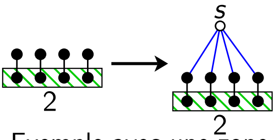


FIGURE : Exemple avec une zone de valeur 2

Etape 1 : extension du graphe

Étendre un graphe $G = (V, E)$:

- **ajouter** un nouveau sommet s,
- **ajouter** un ensemble de nouvelles arêtes F de taille minimum reliant s et V telles que $\mathbf{d_{G+F}(X) \geq R(X)}$, $\forall X \subset V$ (**condition de coupe**),
- Si $d_{G+F}(s)$ est **impair**, **ajouter** encore une arête entre s et V.

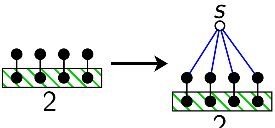
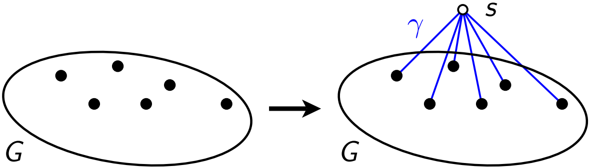


FIGURE : Exemple avec une zone de valeur 2

Extension pour notre problème

Théorème (Frank)

Soit p symétrique **semi surmodulaire** sur V, alors on peut étendre $(V, \emptyset)$ en un graphe vérifiant le **condition de coupe** en ajoutant s et γ arêtes incidentes à s si et seulement si $\sum_{X \in \mathcal{X}} p(X) \leq \gamma, \forall \mathcal{X}$ sous-partition de V.



Lemme : Une fonction symétrique **semi-monotone** est **semi-surmodulaire**.

$\Rightarrow$ **On peut étendre notre graphe !**

Etape 2 : splitting off

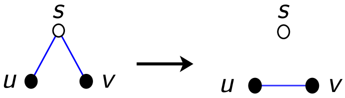


FIGURE : Effectuer le **splitting off** de su, sv consiste à les remplacer par uv.

Etape 2 : splitting off

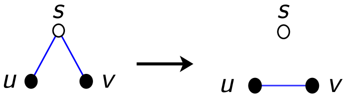


FIGURE : Effectuer le **splitting off** de su, sv consiste à les remplacer par uv. Le splitting su, sv est **admissible** si **la condition de coupe reste valable** après le splitting. (Lovász, Mader)

Etape 2 : splitting off

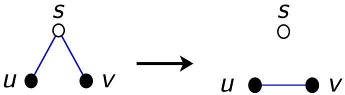
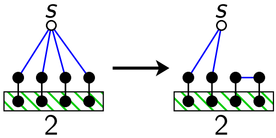


FIGURE : Effectuer le **splitting off** de su, sv consiste à les remplacer par uv. Le splitting su, sv est **admissible** si **la condition de coupe reste valable** après le splitting. (Lovász, Mader)



Exemple sur le graphe précédant,

Etape 2 : splitting off

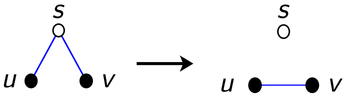
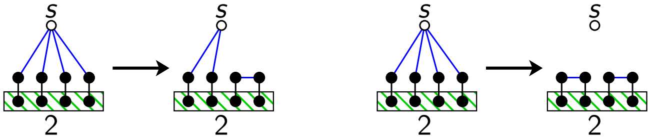


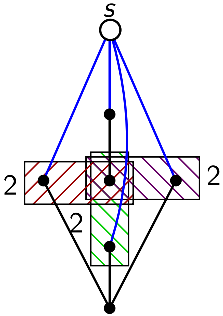
FIGURE : Effectuer le **splitting off** de su, sv consiste à les remplacer par uv. Le splitting su, sv est **admissible** si **la condition de coupe reste valable** après le splitting. (Lovász, Mader)



Exemple sur le graphe précédant, Splitting off complet.

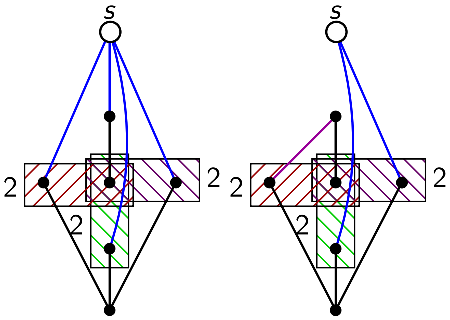
Résolution du problème

Cas problèmatique : l'**obstacle**



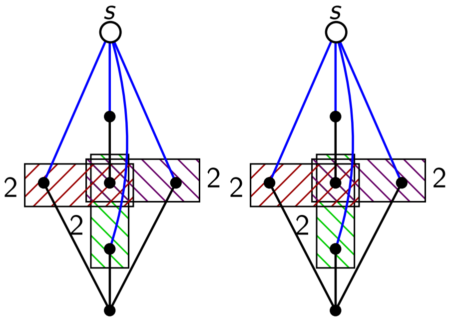
Résolution du problème

Cas problèmatique : l'**obstacle**



Résolution du problème

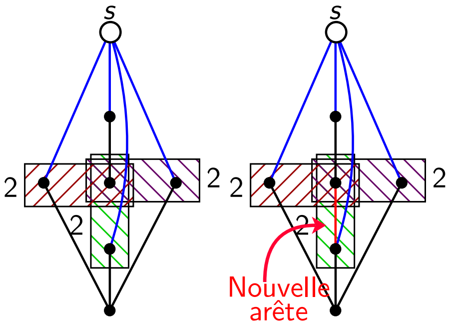
Cas problèmatique : l'obstacle



Une arête supplémentaire est **nécessaire**,

Résolution du problème

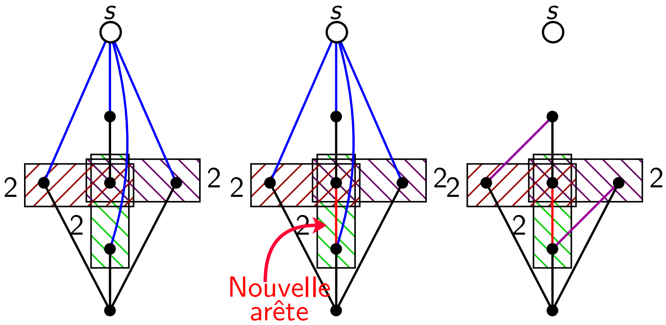
Cas problèmatique : l'**obstacle**



Une arête supplémentaire est **nécessaire**,

Résolution du problème

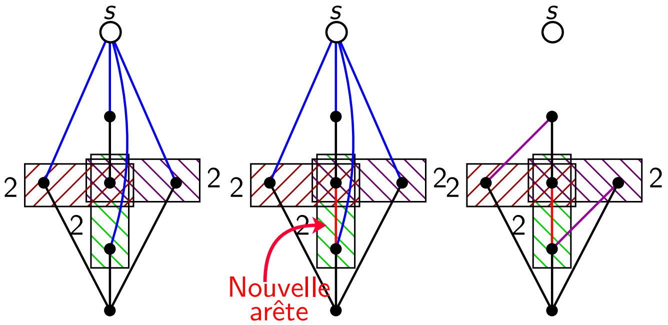
Cas problèmatique : l'**obstacle**



Une arête supplémentaire est **nécessaire**, et **suffisante**.

Résolution du problème

Cas problèmatique : l'**obstacle**

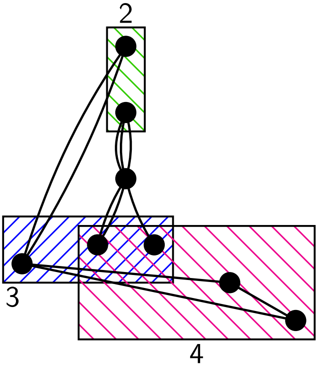


Une arête supplémentaire est **nécessaire**, et **suffisante**.

$G + F$ contient un obstacle $\Leftrightarrow G$ contient une configuration

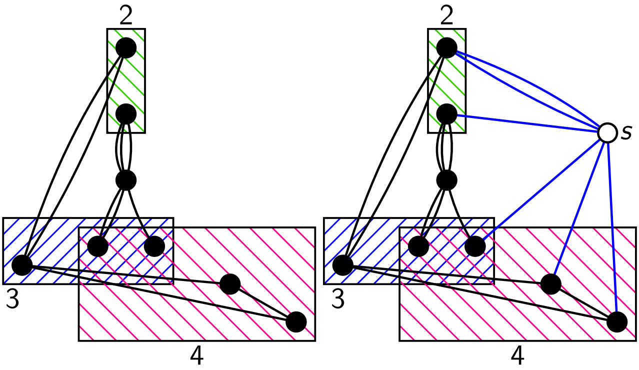
Résolution du problème

Quand il n'y a pas d'obstacle !



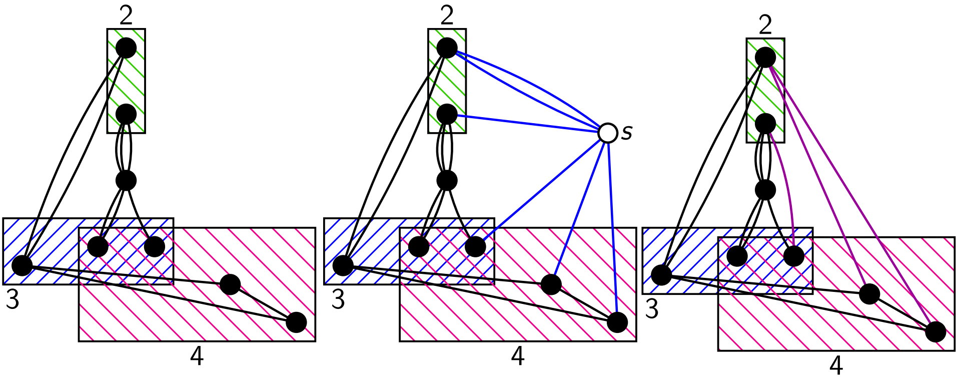
Résolution du problème

Quand il n'y a pas d'obstacle !



Résolution du problème

Quand il n'y a pas d'obstacle !



Théorème minmax

$\mathbf{Opt}(\mathbf{R}, \mathbf{G})$: nombre d'arêtes d'une augmentation de taille minimale de G.

Théorème minmax

$\mathbf{Opt}(\mathbf{R}, \mathbf{G})$: nombre d'arêtes d'une augmentation de taille minimale de G.

Théorème (Ishii, Hagiwara) (Grappe, Szigeti)

Soit $G = (V, E)$ un graphe et R une fonction symétrique semi monotone sur V. Si G ne contient pas de configuration, alors $\mathbf{Opt}(\mathbf{R}, \mathbf{G}) = \lceil \frac{\gamma}{2} \rceil$, sinon $\mathbf{Opt}(\mathbf{R}, \mathbf{G}) = \lceil \frac{\gamma}{2} \rceil + \mathbf{1}$.

Rappel :
$\gamma = \max\{\sum_{X \in \mathcal{X}}(R(X) - d(X)) : \mathcal{X}$ sous-partition de $V\}$.

Algorithme, entrée : G, $\mathcal{W}$, r

Étape 1

Étendre G.

Définitions :

- C est une **grosse** (resp. **petite**) composante de $G + F$ si c'est une **composante connexe** de G et $d_F(s, C) \geq 3$ (resp. $= 1$).
- Un splitting est **permis** s'il contient une arête incidente à une grosse composante.

Étape 2

1. $G + F$ contient une **unique** petite composante C,
   - soit on trouve un **obstacle**,
   - soit on peut **détruire** C :
2. Sinon, **faire** autant de splitting off **permis** que possible
   - soit on a un splitting off admissible complet,
   - soit le graphe obtenu a une forme particulière :

Étape 2

1. $G+F$ contient une **unique** petite composante C,
   - soit on trouve un **obstacle**,
   - soit on peut **détruire** C :
2. Sinon, **faire** autant de splitting off **permis** que possible
   - soit on a un splitting off admissible complet,
   - soit le graphe obtenu a une forme particulière :

Étape 2

1. $G + F$ contient une **unique** petite composante C,
   - soit on trouve un **obstacle**,
   - soit on peut **détruire** C :
2. Sinon, **faire** autant de splitting off **permis** que possible
   - soit on a un splitting off admissible complet,
   - soit le graphe obtenu a une forme particulière :

Étape 2

1. $G + F$ contient une **unique** petite composante C,
   - soit on trouve un **obstacle**,
   - soit on peut **détruire** C :
2. Sinon, **faire** autant de splitting off **permis** que possible
   - soit on a un **splitting off admissible complet**,
   - soit le graphe obtenu a une forme particulière :

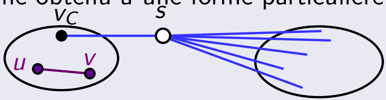
Étape 2

1. $G + F$ contient une **unique** petite composante C,
   - soit on trouve un **obstacle**,
   - soit on peut **détruire** C :
2. Sinon, **faire** autant de splitting off **permis** que possible
   - soit on a un **splitting off admissible complet**,
   - soit le graphe obtenu a une forme particulière :

Étape 2

1. $G + F$ contient une **unique** petite composante C,
   - soit on trouve un **obstacle**,
   - soit on peut **détruire** C :
2. Sinon, **faire** autant de splitting off **permis** que possible
   - soit on a un **splitting off admissible complet**,
   - soit le graphe obtenu a une forme particulière :

C : petite composante

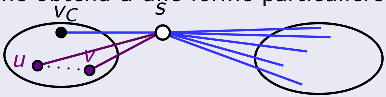


D : grosse composante

Étape 2

1. $G + F$ contient une **unique** petite composante C,
   - soit on trouve un **obstacle**,
   - soit on peut **détruire** C :
2. Sinon, **faire** autant de splitting off **permis** que possible
   - soit on a un **splitting off admissible complet**,
   - soit le graphe obtenu a une forme particulière :

C : petite composante



D : grosse composante

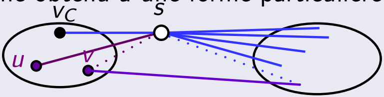
Défaire uv,

Étape 2

1 $G + F$ contient une **unique** petite composante C,
- soit on trouve un **obstacle**,
- soit on peut **détruire** C :

2 Sinon, **faire** autant de splitting off **permis** que possible
- soit on a un **splitting off admissible complet**,
- soit le graphe obtenu a une forme particulière :

C : petite composante



D : grosse composante

Défaire uv, **Faire** un splitting $sx, sy, x \in C, y \in D$, puis **un splitting off admissible complet**.

Obstacle

$G + F$ contient un **obstacle** :

- $d_{G+F}(s)$ pair,
- $\exists$ unique petite composante C telle que $Q(C) = 1$,
- $\exists\{Y_1, \dots Y_k\}$ sous ensembles de V,
  - out-monotones,
  - contenant C,
  - tels que $d_{G+F}(Y_i) \leq R(Y_i) + 1$.

Configuration

$Q(C) = \max\{\sum_{X\in\mathcal{X}}(R(X) - d(X)) : \mathcal{X}$ sous-partition de $C\}$
$\mathcal{B} = \bigcup\{B,$ composante connexe de$G : R(B) = Q(B) = 2\}$

G contient une configuration :

- γ est pair,
- $\exists C$ unique composante connexe de G tel que $Q(C) = 1$,
- $\exists \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ familles de sous ensembles de $V - \mathcal{B}$,
  - $\mathcal{X} \cup \mathcal{B}$ est une sous-partition in-monotone optimale de V ;
  - $\mathcal{Y}$ est formée d'ensembles Y_i :
    - out-monotones,
    - contenant C,
    - contenant ou disjoints de chaque membre de $\mathcal{X}$,
  - $\sum_{Y_i\supset X\in\mathcal{X}}(R(X) - d(X)) \leq q(Y_i) + 1$,
  - $\bigcup\mathcal{Y}$ couvre $\mathcal{X}$.