1.7 Arbres

Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle. En particulier, les chaînes élémentaires et les étoiles sont des arbres. Voir FIG. 1.46 pour quelques exemples d'arbres.

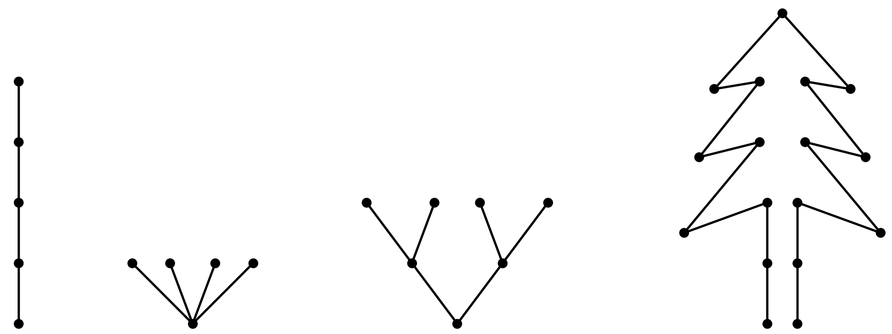

FIG. 1.46 – Quatre arbres.

Une **forêt** est un graphe sans cycle. L'union des quatre arbres de la FIG. 1.46 est une forêt.

Remarque 69 *Chaque composante connexe d'une forêt est un arbre.*

Remarque 70 *Tout graphe partiel d'un arbre est une forêt.*

Un sommet est **pendant** s'il est de degré 1. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un graphe partiel (V, F) de G qui est un arbre (respectivement une forêt) est appelé **arbre couvrant** (resp. **forêt couvrante**) de G.

Exercice 71 *Donner tous les arbres non-isomorphes à*
(a) $1, 2$ *ou* 3 *sommets,*
(b) 4 *sommets,*
(c) 5 *sommets.*

Solution (a) Pour $1 \leq n \leq 3$, la chaîne élémentaire de longueur $n - 1$ est l'unique arbre à n sommets. (voir FIG. 1.47 (a) pour $n = 3$)
(b) Il existe exactement deux arbres non-isomorphes à 4 sommets. (voir FIG. 1.47 (b))
(c) Il existe exactement trois arbres non-isomorphes à 5 sommets. (voir FIG. 1.47 (c))

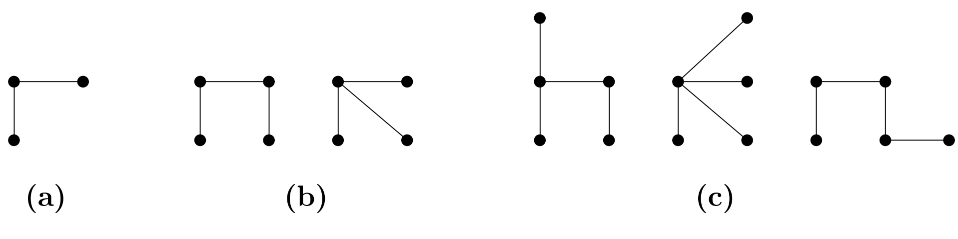

FIG. 1.47 – Les arbres non-isomorphes à $3, 4$ ou 5 sommets.

□

Exercice 72 *Montrer qu'un graphe G sans boucle est un arbre si et seulement si, pour toute paire x, y de sommets distincts de G, il existe une et une seule (x, y)-chaîne élémentaire dans G.*

Solution Par définition, G est connexe si et seulement si, pour toute paire x, y de sommets distincts de G, il existe au moins une (x, y)-chaîne élémentaire dans G. De plus, par l'Exercice 32, G est sans cycle si et seulement si, pour toute paire x, y de sommets distincts de G, il existe au plus une (x, y)-chaîne élémentaire dans G. Ces deux faits impliquent le résultat. $\square$

Remarque 73 *Par l'Exercice 72, en ajoutant une arête entre deux sommets distincts d'un arbre on crée exactement un cycle.*

Exercice 74 *Soient G un arbre ayant au moins deux sommets et v un sommet de G. Montrer que le nombre de composantes connexes de $G - v$ est égal à $d_G(v)$.*

Solution Soient $G_1, ..., G_k$ les composantes connexes de $G - v$; $k \geq 1$ car G a au moins deux sommets. Puisque G est connexe et par la Remarque 38, le sommet v a au moins un voisin dans chaque G_i ; et puisque G est sans cycle, il en a au plus un. De plus, tout voisin de v se trouve dans un G_i. En conséquence, $k = d_G(v)$. $\square$

Exercice 75 *Soit G un arbre ayant au moins deux sommets.*
- *(a) Montrer que G possède au moins un sommet pendant.*
- *(b) Montrer que G possède au moins deux sommets pendants.*
- *(c) Montrer que pour tout sommet v de G, chaque composante connexe de $G - v$ contient au moins un sommet pendant de G.*
- *(d) En déduire que G possède au moins $\Delta(G)$ sommets pendants.*

Solution (a) Puisque G est un graphe connexe avec au moins deux sommets, on a $d(v) \geq 1$ pour tout $v \in V(G)$. Puisque G est sans cycle, par l'Exercice 33(b), il existe un sommet u tel que $d(u) \leq 1$. Par conséquent $d(u) = 1$ et ainsi u est un sommet pendant de G.

(b) Par (a), il existe dans G un sommet pendant u. Soit P une plus longue chaîne élémentaire de G ayant u comme extrémité. L'autre extrémité de P est un sommet v distinct de u, puisque G est connexe et possède au moins deux sommets. Le sommet v est de degré 1, sinon, d'après l'Exercice 33(a), il aurait au moins deux voisins dans P et appartiendrait donc à un cycle, ce qui contredirait le fait que G est un arbre.

(c) Soient v un sommet de G et U l'ensemble des sommets d'une composante connexe de $G - v$. Par définition de U et par la connexité de G, le voisinage de U est égal à $\{v\}$. Par conséquent, le sous-graphe G' de G induit par $U \cup \{v\}$ est un arbre, et il a au moins deux sommets. Par (b), G' contient au moins deux sommets pendants, l'un d'eux au moins appartient à U. Puisque $N_G(U) = \{v\}$, ce sommet est aussi pendant dans G.

(d) Soit v un sommet de G de degré maximum $\Delta(G)$. Par l'Exercice 74, le nombre de composantes connexes de $G - v$ est égal à $d_G(v) = \Delta(G)$. Par (c), chacune de ces composantes connexes contient un sommet pendant de G et donc G possède au moins $\Delta(G)$ sommets pendants. $\square$

Exercice 76 *Montrer que le graphe obtenu à partir d'un arbre, en supprimant ou en rajoutant, un sommet pendant, est un arbre.*

Solution Soit G un arbre.

On considère tout d'abord le cas où l'on supprime un sommet pendant de G. En supprimant un sommet quelconque on ne peut pas créer un cycle, il reste à montrer que si v est un sommet pendant de G alors $G - v$ est connexe. Pour cela, soient u et w deux sommets de $G - v$. Puisque G est connexe et qu'il contient les sommets u et w, il possède une (u, w)-chaîne élémentaire P. Le sommet v est distinct de u et w et son degré dans G est égal à 1, il ne peut donc pas appartenir à cette chaîne et ainsi les sommets u et w restent connectés par P dans $G - v$. On en conclut que $G - v$ est connexe.

On regarde maintenant le cas où l'on rajoute un nouveau sommet v et une arête reliant v à un sommet u de G ; on appelle G' le graphe ainsi obtenu. Le sommet v étant de degré 1 il n'est pas contenu dans un cycle de G' et $G = G' - v$ est un arbre et donc sans cycle. En conséquence, G' est sans cycle. Il reste à montrer que G' est connexe. Puisque G est un sous-graphe connexe de G', tous les sommets de G sont dans la même composante connexe de G'. Celle-ci contient u, et donc v aussi, car uv est une arête de G'. On en conclut que G' a une seule composante connexe et donc qu'il est connexe. □

Exercice 77 *Montrer que le nombre d'arêtes d'un arbre à n sommets est égal à $n - 1$.*

Solution On raisonne par récurrence sur le nombre de sommets. Un arbre à 1 sommet n'a pas d'arête, donc la propriété est vérifiée pour $n = 1$. Supposons que la propriété soit vérifiée pour tous les arbres à $n-1$ sommets. Soit G un arbre à n sommets. Par l'Exercice 75, G contient un sommet pendant v, et d'après l'Exercice 76, en supprimant v on obtient un arbre G' à $n - 1$ sommets. En vertu de l'hypothèse de récurrence, $|E(G')| = (n - 1) - 1$. Puisque que G a exactement une arête de plus que G' (l'unique arête incidente à v), on a $|E(G)| = |E(G')| + 1 = n - 1$. □

Exercice 78 *Soit F une forêt à n sommets et m arêtes dont le nombre de composantes connexes est égal à k. Montrer que $m = n - k$.*

Solution Soient $F_1, \ldots, F_k$ les composantes connexes de F. Chaque F_i est un arbre, donc par l'Exercice 77, $|E(F_i)| = |V(F_i)| - 1$, d'où

$$m = \sum_{i=1}^{k} |E(F_i)| = \sum_{i=1}^{k} (|V(F_i)| - 1) = |V(F)| - k = n - k.$$

□

Exercice 79 *Montrer qu'un graphe G ayant n sommets et au moins n arêtes possède un cycle.*

Solution Sinon G est une forêt. Soit $k \geq 1$ le nombre de composantes connexes de G. D'après l'Exercice 78, on a $|E(G)| = n - k < n$, ce qui contredit l'hypothèse sur le nombre d'arêtes. □

Exercice 80 *Montrer qu'un graphe G est sans cycle si et seulement si il existe un ordre $v_1, v_2, ..., v_n$ des sommets de G tel que v_i est de degré inférieur ou égal à 1 dans le sous-graphe G_i de G induit par les i premiers sommets pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc G un graphe sans cycle. On construit l'ordre en utilisant l'algorithme suivant : Initialement on pose $G_n := G$ et $i := n$ et tant que $i \geq 1$ on répète : choisir un sommet v_i de degré inférieur ou égal à 1 dans G_i, poser $G_{i-1} := G_i - v_i$ et $i := i - 1$.

Pour montrer que l'algorithme est correct, il suffit de remarquer que chaque G_i est sans cycle et que le sommet v_i existe d'après l'Exercice 33(b).

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Soit donc $v_1, v_2, ..., v_n$ un ordre vérifiant les conditions de l'énoncé. On suppose par l'absurde que $G = G_n$ contient un cycle C, et on définit i le plus grand indice tel que v_i est contenu dans C. Alors G_i contient C. Puisque le degré de v_i dans C est au moins 2, l'hypothèse sur l'ordre donne la contradiction suivante : $2 \leq d_C(v_i) \leq d_{G_i}(v_i) \leq 1$. □

Exercice 81 *Montrer qu'un graphe G contient un arbre couvrant si et seulement si G est connexe.*

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc F un arbre couvrant de G. Puisque, par définition, F est connexe, d'après la Remarque 36, G l'est aussi.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons que G est un graphe connexe et soit F un graphe partiel connexe de G avec un nombre minimum d'arêtes. Si F contient un cycle C, alors soit e une arête de C. Par l'Exercice 42, $F - e$ est un graphe partiel connexe de G contenant moins d'arêtes que F ce qui contredit la minimalité de F. Par conséquent, F est un graphe partiel de G connexe et sans cycle, et donc un arbre couvrant de G. $\square$

Exercice 82 *Soit G un graphe à n sommets dont le nombre de composantes connexes est égal à k. Montrer que le nombre maximum d'arêtes d'une forêt couvrante de G est égal à $n - k$.*

Solution Soient F une forêt couvrante de G et k_F le nombre de composantes connexes de F. Puisque chaque composante connexe de F est incluse dans une composante connexe de G, on a $k_F \geq k$. Par l'Exercice 78, $|E(F)| = n - k_F \leq n - k$.

Pour terminer la démonstration, nous montrons qu'il existe une forêt couvrante de G ayant $n - k$ arêtes. Soient $G_1, \ldots, G_k$ les composantes connexes de G. Par l'Exercice 81, chaque G_i possède un arbre couvrant F_i. La forêt dont les composantes connexes sont ces F_i est couvrante, et d'après l'Exercice 78, cette forêt contient $n - k$ arêtes. $\square$

Remarque 83 *On note que, par l'Exercice 78, maximiser le nombre d'arêtes d'une forêt couvrante est équivalent à minimiser le nombre de ses composantes connexes.*

Exercice 84 *Soient G un graphe connexe et u un sommet de G.*

(a) Montrer que G possède un sommet v tel que $G - v$ reste connexe.

(b) Montrer que G possède un sommet $v \neq u$ tel que $G - v$ reste connexe.

Solution (a) G est connexe, donc, par l'Exercice 81, G contient un arbre couvrant F. Par l'Exercice 75(a), F possède un sommet pendant v et ainsi par l'Exercice 76, $F - v$ est un arbre. Or $F - v$ est un graphe partiel de $G - v$ et donc, par l'Exercice 81, $G - v$ est connexe.

(b) Par l'Exercice 75(b), il existe, dans la démonstration précédente, un sommet pendant v différent de u. $\square$

Exercice 85 *Soit G un graphe connexe à n sommets.*

(a) Montrer que pour tout $i = 1, \ldots, n - 1$, il existe un sous-ensemble X_i de i sommets tel que $G - X_i$ est connexe.

(b) Montrer que pour tout $u \in V(G)$, il existe un ordre $\{v_1 = u, v_2, \ldots, v_n\}$ des sommets de G tel que pour chaque $i = 1, \ldots, n$, le sous-graphe G_i de G induit par les i premiers sommets est connexe.

Solution (a) En répétant i fois l'Exercice 84(a), l'ensemble X_i des i sommets supprimés vérifie les conditions voulues.

(b) On construit l'ordre en utilisant l'algorithme suivant : Initialement on pose $v_1 := u$, $G_n := G$ et $i := n$ et tant que $i > 1$ on répète : choisir un sommet v_i de G_i différent de u tel que $G_{i-1} := G_i - v_i$ soit connexe (par l'Exercice 84(b), un tel sommet existe), poser $i := i - 1$. $\square$

Exercice 86 *Soit G un graphe dont le nombre de sommets est supérieur ou égal à 5. Montrer que G ou $\overline{G}$ contient un cycle.*

Solution Soit n le nombre de sommets de G. Supposons que G et $\overline{G}$ ne contiennent pas de cycle, alors d'après l'Exercice 79, $|E(G)| + |E(\overline{G})| \leq 2(n-1)$. Puisque le graphe induit par la réunion des arêtes de G et de $\overline{G}$ est un graphe complet à n sommets, on a $|E(G)| + |E(\overline{G})| = |E(K_n)|$. Par l'Exercice 10, $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$. En combinant les trois inégalités précédentes, on obtient $\frac{n(n-1)}{2} \leq 2(n-1)$, c'est-à-dire $n \leq 4$, ce qui contredit notre hypothèse sur n. □

Exercice 87 *Soit G un graphe à n sommets et m arêtes dont le nombre de composantes connexes est égal à k. Montrer que G contient au moins $m - n + k$ cycles élémentaires distincts.*

Solution Soit F une forêt couvrante de G ayant un nombre maximum d'arêtes. Alors, par la Remarque 83, toute arête de G en dehors de F relie deux sommets dans la même composante connexe de F, c'est-à-dire dans un même arbre de F. Par l'Exercice 73, l'adjonction d'une arête à F crée un cycle unique qui est, d'après l'Exercice 26, élémentaire. Les cycles ainsi obtenus contiennent chacun une et une seule arête en dehors de F, ils sont donc distincts et leur nombre est égal $m - (n - k)$ puisque, par l'Exercice 82, F a $n - k$ arêtes. □

Exercice 88 *Étant donnés $n \geq 2$ nombres entiers positifs $d_1, d_2, ..., d_n$, montrer qu'il existe un arbre à n sommets tel que $d_1, d_2, ..., d_n$ soit la liste des degrés de ses sommets si et seulement si*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2. \tag{1.5}$$

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc F un arbre dont la liste des degrés des sommets est $d_1, d_2, ..., d_n$. Alors, d'après les Exercices 8 et 77,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E(F)| = 2(n-1).$$

Montrons maintenant que la condition est suffisante en raisonnant par récurrence sur n. Si $n = 2$ alors (1.5) implique que $d_1 = d_2 = 1$, le graphe K_2 est un arbre ayant ces degrés. Maintenant supposons que la condition est suffisante pour $n - 1$. Soient $d_1, d_2, \ldots, d_n$, $n \geq 3$ nombres entiers positifs qui satisfont (1.5). On peut poser sans perte de généralité $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$. A cause de (1.5), $d_n = 1$ car sinon

$$2n - 2 = \sum_{i=1}^{n} d_i \geq \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n,$$

ce qui est une contradiction. De même, $d_1 \geq 2$ car sinon

$$2n - 2 = \sum_{i=1}^{n} d_i \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

c'est-à-dire $n \leq 2$, ce qui contredit $n \geq 3$.

On considère la liste $d_1 - 1, d_2, \ldots, d_{n-1}$. Par ce qui précède, ces entiers sont positifs et leur somme est égale à $(\sum_{i=1}^{n} d_i) - 2$ et donc par (1.5) à $(2n-2) - 2 = 2(n-2)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence il existe donc un arbre F' à $n-1$ sommets $v_1, \ldots, v_{n-1}$ de degrés $d_1 - 1, d_2, \ldots, d_{n-1}$. Soit F le graphe obtenu à partir de F' en ajoutant un nouveau sommet v_n et une nouvelle arête v_1v_n. Par l'Exercice 76, F est un arbre et par construction, ses sommets ont les degrés $d_1, d_2, ..., d_n$. $\square$

Étant donnés un graphe G et un arbre couvrant T de G, pour une arête f de G qui n'est pas dans T, on appelle **cycle fondamental de $T + f$,** l'unique cycle C_f de $T + f$. Par la Remarque 73, C_f existe.

Remarque 89 *Soient T un arbre couvrant d'un graphe G et f une arête de G qui n'est pas dans T. Alors le cycle fondamental de $T + f$ est élémentaire et f est son unique arête qui n'est pas dans T.*

Exercice 90 *Soit G un graphe connexe. Montrer que G est un arbre si et seulement si pour toute arête e de G, le graphe $G - e$ n'est pas connexe.*

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc G un arbre. Pour toute arête uv de G, d'après l'Exercice 72, le graphe $G - uv$ ne contient pas de (u, v)-chaîne élémentaire et donc d'après l'Exercice 24, $G - uv$ ne contient pas de (u, v)-chaîne. Par conséquent $G - uv$ n'est pas connexe.

Montrons maintenant par l'absurde que la condition est suffisante. Supposons donc que G ne soit pas un arbre, c'est-à-dire que, puisque G est connexe par hypothèse, G contienne un cycle C. Alors pour une arête quelconque e de C, d'après l'Exercice 42, $G - e$ reste connexe, ce qui est une contradiction. $\square$

Remarque 91 *Par l'Exercice 90, le graphe obtenu à partir d'un arbre en supprimant une arête n'est plus connexe et, par la Remarque 39, ce graphe a exactement deux composantes connexes.*

Remarque 92 *Par l'Exercice 90, un graphe G est une forêt si et seulement si pour toute arête e de G, le graphe $G - e$ a plus de composantes connexes que G. De manière équivalente on a que, en rajoutant une arête e à une forêt G, le graphe G' obtenu reste une forêt si et seulement si e est une coupe de G'.*

Étant donné un arbre $T = (V, F)$, pour une arête f de T (FIG. 1.48 (a)), on appelle **bipartition fondamentale de $T - f$,** la bipartition $\{X, V \setminus X\}$ constituée par l'ensemble des sommets de chacune des deux composantes connexes de $T - f$ (FIG. 1.48 (b)). Par la Remarque 91, cette bipartition fondamentale existe bien pour toute arête f de T.

Étant donnés un graphe G et un arbre couvrant T de G, pour une arête f de T (FIG. 1.48 (c)), on appelle **coupe fondamentale associée à $T - f$,** la coupe de G définie par la bipartition fondamentale de $T - f$ (FIG. 1.48 (d)).

Remarque 93 *Si f est une arête d'un arbre couvrant T d'un graphe G, alors elle est l'unique arête de T qui appartient à la coupe fondamentale de G associée à $T - f$.*

Exercice 94 *Soit F un sous-ensemble d'arêtes d'un graphe G. Montrer que $G(F)$ est un arbre couvrant de G si et seulement si F intersecte toutes les coupes de G et est minimal pour cette propriété.*

Solution Par l'Exercice 40, $G(F)$ est connexe si et seulement si F intersecte toutes les coupes de G. Par conséquent, cet exercice est équivalent à l'Exercice 90. $\square$

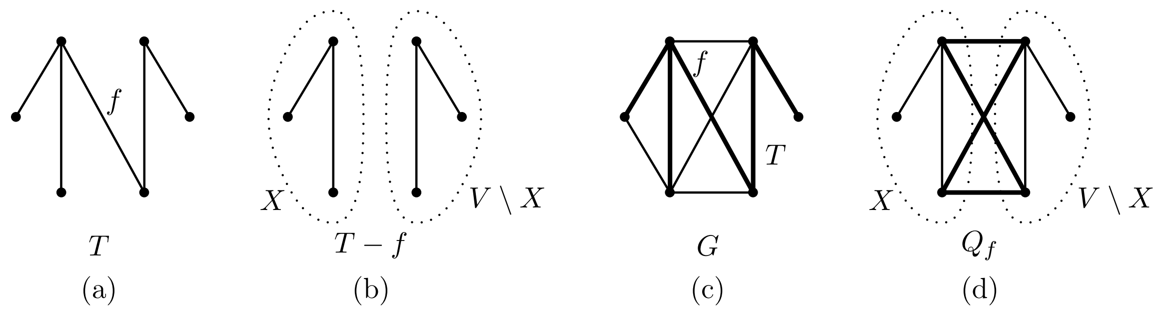

FIG. 1.48 – (a) Un arbre T et une arête f de T, (b) la bipartition fondamentale $\{X, V \setminus X\}$ de $T - f$, (c) un graphe G, un arbre couvrant T de G et une arête f de T, (d) la coupe fondamentale Q_f de G définie par la bipartition fondamentale $\{X, V \setminus X\}$ de $T - f$.

Exercice 95 *Soit F un sous-ensemble d'arêtes d'un graphe connexe $G = (V, E)$. Montrer que $G(F)$ est un arbre couvrant de G si et seulement si $E \setminus F$ intersecte tous les cycles de G et est minimal pour cette propriété.*

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc $G(F)$ un arbre couvrant de G. Puisque $G(F)$ est sans cycle, $E \setminus F$ intersecte tous les cycles de G. De plus, pour toute arête e de $E \setminus F$, e est l'unique arête de F contenue dans le cycle fondamental de $G(F) + e$. Par conséquent, $(E \setminus F) \setminus \{e\}$ n'intersecte plus ce cycle et F est bien minimal pour la propriété.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Puisque $E \setminus F$ intersecte tous les cycles de G, $G(F)$ est sans cycle. Supposons par l'absurde que $G(F)$ ne soit pas un arbre couvrant de G, c'est-à-dire que $G(F)$ ait plusieurs composantes connexes. Soit X l'ensemble des sommets de l'une d'elles. Puisque G est connexe, par l'Exercice 40, il existe une arête e de $E \setminus F$ reliant X et $V \setminus X$. Donc cette arête e relie X à une autre composante connexe de $G(F)$ et ainsi par la Remarque 39, $G(F \cup \{e\})$ est sans cycle, c'est-à-dire que $(E \setminus F) \setminus e$ intersecte tous les cycles de G, ce qui contredit la minimalité de $E \setminus F$. □

Exercice 96 *Soient G un graphe, H un arbre couvrant de G, f une arête de G qui n'est pas dans H et e une arête de H. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) le graphe obtenu à partir de H en supprimant e et en ajoutant f est un arbre couvrant de G,

(b) e appartient au cycle fondamental de $H + f$,

(c) f appartient à la coupe fondamentale de G associée à $H - e$.

Solution (a) $\Longleftrightarrow$ (b) : Soit C_f le cycle fondamental de $H + f$. Par l'Exercice 42, le graphe $H + f - e$ est connexe et sans cycle (donc un arbre couvrant de G) si et seulement si e appartient à C_f.

(a) $\Longleftrightarrow$ (c) : Soit Q_e la coupe fondamentale de G associée à $H - e$. Par la Remarque 39, le graphe $H - e + f$ est connexe et sans cycle (donc un arbre couvrant de G) si et seulement si f appartient à Q_e. □

Exercice 97 *Soient F_1 et F_2 deux forêts sur le même ensemble V de sommets. Montrer que si F_2 a plus d'arêtes que F_1 alors il existe une arête e de F_2 qui n'est pas dans F_1 telle que $F_1 + e$ soit une forêt.*

Solution Soit $n = |V|$. Pour $i = 1, 2$, on note m_i le nombre d'arêtes et k_i le nombre de composantes connexes de F_i. Par l'Exercice 78 et l'hypothèse, on a $n - k_1 = m_1 < m_2 = n - k_2$, donc $k_2 < k_1$. Soit $G = (V, E(F_1) \cup E(F_2))$ et k le nombre de composantes connexes de G. Remarquons que G s'obtient en ajoutant à F_1 les arêtes de F_2 qui ne sont pas dans F_1 ou de façon équivalente en ajoutant à F_2 les arêtes de F_1 qui ne sont pas dans F_2. Par la Remarque 39, on en déduit d'une part que $k \le k_2$ et ainsi, par l'inégalité précédente, $k < k_1$; et d'autre part qu'il existe donc une arête e de G telle que les deux extrémités de e appartiennent à des composantes connexes de F_1 distinctes. Donc $e \in E(F_2) \setminus E(F_1)$ et, par la Remarque 39, $F_1 + e$ est une forêt. □

Exercice 98 *Soient G_1 et G_2 deux arbres sur le même ensemble V de sommets. Montrer que pour toute arête e_1 de G_1 il existe une arête e_2 de G_2 telle que $G_1 - e_1 + e_2$ et $G_2 + e_1 - e_2$ soient des arbres.*

Solution Soit $e_1 = wz$ une arête quelconque de G_1. Voir FIG. 1.49. On peut supposer que wz n'est pas une arête de G_2, car sinon $e_2 = e_1$ convient.

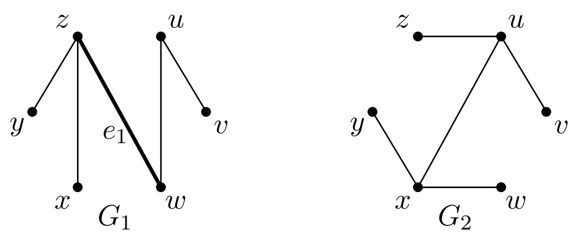

FIG. 1.49 – Les arbres G_1 et G_2 et l'arête e_1.

Par la Remarque 91, $G_1 - e_1$ a exactement deux composantes connexes, on dénote leurs ensembles de sommets par X et $V \setminus X$.

Nous considérons les conditions qu'une arête e de G_2 doit vérifier pour que $G_1 - e_1 + e$ et $G_2 + e_1 - e$ soient des arbres.

- Par la Remarque 39, une condition nécessaire et suffisante pour que $G_1 - e_1 + e$ soit un arbre est que e ait une extrémité dans X et l'autre dans $V \setminus X$. Voir FIG. 1.50(a).
- D'après l'Exercice 96, une condition nécessaire et suffisante pour que $G_2 + e_1 - e$ soit un arbre est que e se trouve dans la chaîne unique P de G_2 reliant les deux extrémités de e_1. Voir FIG. 1.50(b).

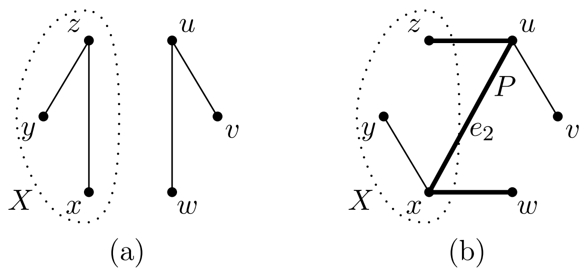

FIG. 1.50 – (a) Le graphe $G_1 - e_1$ et l'ensemble X, (b) le graphe G_2 et la chaîne P.

Puisque les extrémités de e_1 et donc celles de P, sont l'une dans X et l'autre dans $V \setminus X$, par l'Exercice 28, P contient au moins une arête reliant X et $V \setminus X$, soit e_2 une telle arête. Ainsi e_2 satisfait les deux conditions ci-dessus, et $G_1 - e_1 + e_2$ et $G_2 + e_1 - e_2$ sont effectivement des arbres. Voir FIG. 1.51.

On peut présenter la démonstration ci-dessus (pour le cas où e_1 n'est pas dans G_2) de la manière suivante. Soient $G := (V, E(G_1) \cup E(G_2))$, Q_1 la coupe fondamentale de G associée à

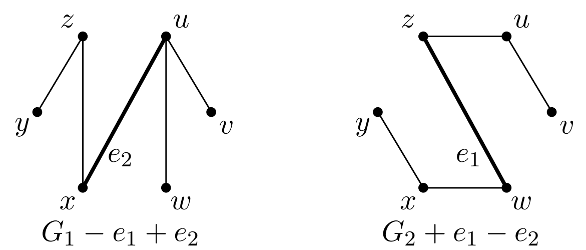

FIG. 1.51 – Les arbres $G_1 - e_1 + e_2$ et $G_2 + e_1 - e_2$.

$G_1 - e_1$ et C_1 le cycle fondamental de $G_2 + e_1$. Pour une arête e de G_2 : par la Remarque 39 et l'Exercice 96, $G_1 - e_1 + e$ et $G_2 + e_1 - e$ sont des arbres si et seulement si e appartient à $Q_1 \cap C_1$. Puisque les arêtes de C_1 distinctes de e_1 sont toutes dans G_2, n'importe quelle arête de $Q_1 \cap C_1 \setminus \{e_1\}$ convient comme e_2. Or par l'Exercice 57, $Q_1 \cap C_1$ est de cardinal pair, et contient e_1 par définition ; par conséquent $|Q_1 \cap C_1| \geq 2$ et e_2 existe. □

1.8 Arbre couvrant de coût minimum

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, une **fonction de coût sur les arêtes** de G, $c : E(G) \to \mathbb{R}$, est l'affectation d'une valeur $c(e)$ à chaque arête e de G. Soit F un sous-ensemble quelconque d'arêtes de G. On définit la **capacité de F** comme le coût minimum d'une arête de F et le **c-coût de F** (ou **coût** s'il n'y a pas d'ambiguïté), noté **$c(F)$**, comme la somme des coûts des arêtes de F :

$$c(F) = \sum_{e \in F} c(e).$$

Par extension, le **coût du graphe G**, noté **$c(G)$**, est égal au coût de l'ensemble E de ses arêtes.

Dans cette section nous nous intéressons à la recherche d'un arbre couvrant de G de coût minimum.

Remarque 99 *Si G est connexe alors, par l'Exercice 81, le nombre d'arbres couvrants de G est non-nul et fini. Par conséquent, le coût minimum d'un arbre couvrant de G est bien défini.*

Remarque 100 *Le problème de l' arbre couvrant* **de coût maximum** *est équivalent à celui de l'arbre couvrant de coût minimum ; il suffit de multiplier la fonction de coût par -1.*

Remarque 101 *Pour le problème de l'arbre couvrant de G de coût minimum on peut supposer que la fonction de coût est positive. En effet, par l'Exercice 77, tous les arbres couvrants de G contiennent le même nombre d'arêtes, donc en ajoutant la même valeur aux coûts des arêtes de G, les arbres couvrants de G de coût minimum restent identiques.*

Remarque 102 *Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût positive sur les arêtes. Le problème de trouver un sous-ensemble F d'arêtes de G de coût minimum tel que $G - F$ soit sans cycle se ramène à celui de l'arbre couvrant de coût maximum. En effet, ce problème est équivalent à trouver un graphe partiel de G qui soit sans cycle, de coût maximum, et puisque les coûts sont positifs et G est connexe, un tel graphe partiel est un arbre couvrant de coût maximum.*

Remarque 103 *Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût strictement positive sur les arêtes de G. Le problème de trouver un arbre couvrant de G qui minimise le produit des coûts de ses arêtes se ramène à celui de l'arbre couvrant de G de c'-coût minimum où $c'(e) = log(c(e))$ pour toute arête e de G.*

Remarque 104 *Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G. Le problème de trouver un arbre couvrant de G qui minimise la racine de la somme des carrés des coûts de ses arêtes se ramène à celui de l'arbre couvrant de G de c'-coût minimum où $c'(e) = c^2(e)$ pour toute arête e de G.*

Dans la suite nous utiliserons la notation $\boldsymbol{\mathcal{F}_{(G,c)}}$ pour désigner l'ensemble des sous-ensembles d'arêtes de G qui appartiennent à au moins un arbre couvrant de G de coût minimum. Par la Remarque 70, chaque élément de $\mathcal{F}_{(G,c)}$ induit une forêt, mais on remarque qu'il peut exister des forêts de G dont l'ensemble des arêtes n'appartient pas à $\mathcal{F}_{(G,c)}$.

Exercice 105 *Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G. Montrer que si tous les coûts sont différents alors il existe un seul arbre couvrant de G de coût minimum.*

Solution Puisque G est connexe, par la Remarque 99, il existe au moins un arbre couvrant de G de coût minimum. Supposons que G possède deux arbres couvrants différents de coût minimum, $G_1 = (V, E_1)$ et $G_2 = (V, E_2)$. Puisque G_1 et G_2 sont différents, il existe une arête e_1 qui appartient à l'un et pas à l'autre, on peut supposer que $e_1 \in E_1 \setminus E_2$. D'après l'Exercice 98, il existe une arête $e_2 \in E_2$ telle que $G_1 - e_1 + e_2$ et $G_2 + e_1 - e_2$ soient des arbres couvrants de G. Les arbres couvrants G_1 et G_2 étant supposés de coût minimum, on a

$$\begin{aligned} c(G_1 - e_1 + e_2) &\geq c(G_1), \\ c(G_2 + e_1 - e_2) &\geq c(G_2), \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} c(G_1 - e_1 + e_2) &= c(G_1) - c(e_1) + c(e_2), \\ c(G_2 + e_1 - e_2) &= c(G_2) + c(e_1) - c(e_2), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} c(e_2) &\geq c(e_1), \\ c(e_1) &\geq c(e_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, $c(e_1) = c(e_2)$, or e_1 et e_2 sont distincts, ceci contredit l'hypothèse de l'exercice. $\square$

Exercice 106 *Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G. Montrer que si F appartient à $\mathcal{F}_{(G,c)}$, Q est une coupe disjointe de F, et e est une arête de coût minimum dans Q, alors l'ensemble obtenu en ajoutant l'arête e à F appartient encore à $\mathcal{F}_{(G,c)}$.*

Solution Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur ses arêtes (FIG. 1.52(a)). Supposons que F, Q et e vérifient l'hypothèse de l'énoncé avec $Q = \delta(X)$ et $e = uv$ où $u \in X$ et $v \in V \setminus X$ (FIG. 1.52(b)). Puisque $F \in \mathcal{F}_{(G,c)}$, il existe $G' = (V, F')$, un arbre couvrant de G de coût minimum contenant toutes les arêtes de F (FIG. 1.52(c)). Si $e \in F'$, alors $F \cup \{e\} \subseteq F'$ et donc $F \cup \{e\} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Sinon, soit P une (u, v)-chaîne de G' (FIG. 1.52(d)). Par l'Exercice 28, il

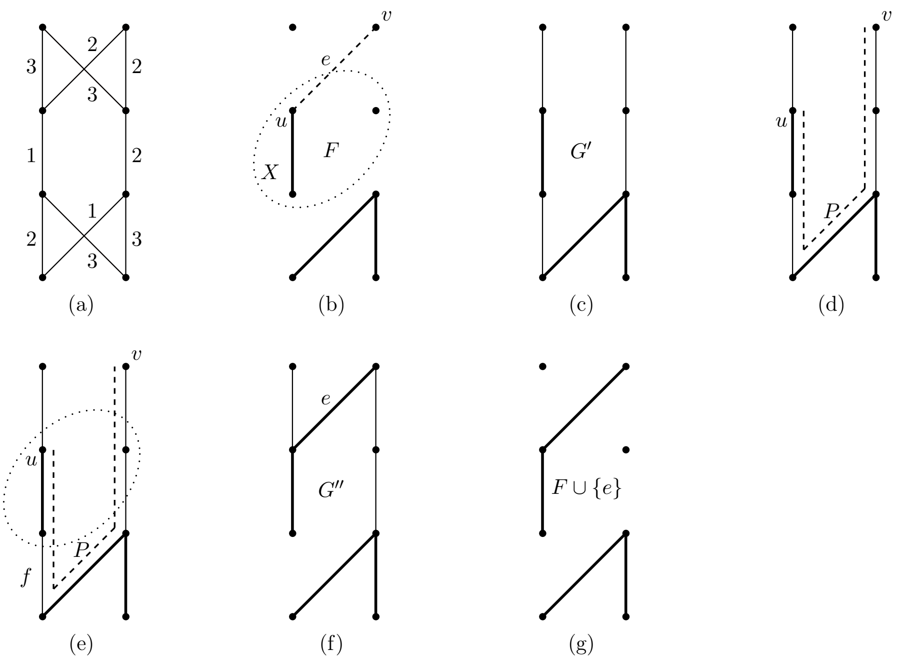

FIG. 1.52 – (a) Le graphe G et les coûts de ses arêtes, (b) l'ensemble F d'arêtes, l'ensemble X de sommets et l'arête $e = uv$, (c) un arbre couvrant $G' = (V, F')$ de G de coût minimum, (d) la (u, v)-chaîne P de G', (e) une arête $f \in E(P) \cap Q$, (f) l'arbre couvrant G'' de G, (g) $F \cup \{e\}$.

existe au moins une arête f appartenant à la fois à la chaîne P et à la coupe Q (FIG. 1.52(e)). Donc, $f \neq e$ et d'après l'Exercice 96, $G'' := G' + e - f$ est un arbre couvrant de G (FIG. 1.52(f)).

Puisque e est une arête de Q de coût minimum et f est une arête de Q, $c(f) \geq c(e)$. Donc $c(G'') = c(G') + c(e) - c(f) \leq c(G')$. De plus, G' étant un arbre couvrant de G de coût minimum, on a $c(G') \leq c(G'')$. Par conséquent, $c(G') = c(G'')$ et ainsi G'' est aussi un arbre couvrant de G de coût minimum. Puisque f appartient à Q qui est disjointe de F, on a que f n'appartient pas à F, et de plus $f \neq e$, donc $F \cup \{e\} \subseteq E(G'')$ d'où $F \cup \{e\} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$ (FIG. 1.52(g)). □

Exercice 107 *Soient G un graphe connexe, c une fonction de coût sur les arêtes de G et e une arête de G. Montrer qu'il existe un arbre couvrant de coût minimum contenant e si et seulement si il existe une coupe de G telle que e soit une arête de coût minimum dans cette coupe.*

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc qu'il existe F, un arbre couvrant de G de coût minimum, qui contient e. Par définition, l'arête e appartient à la coupe fondamentale Q associée à $F - e$. Pour toute arête f de Q, d'après l'Exercice 96, $F' := F - e + f$ est un arbre couvrant de G et donc par l'hypothèse sur F, $c(F) - c(e) + c(f) = c(F') \geq c(F)$. Par conséquent, $c(f) \geq c(e)$ et e est bien une arête de coût minimum dans Q.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons que e soit une arête de coût minimum dans une coupe Q. Par l'Exercice 106, appliqué à $F = \emptyset$ (qui est évidemment dans $\mathcal{F}_{(G,c)}$), Q et e, on obtient que $e \in \mathcal{F}_{(G,c)}$, en d'autres termes, l'arête e appartient à un arbre couvrant de G de coût minimum. □

Remarque 108 *Pour un problème d'optimisation, le principe d'un algorithme glouton est de construire une solution pas à pas, en opérant à chaque étape le choix qui semble le meilleur à cet instant, sans jamais revenir sur ces décisions, dans l'espoir d'obtenir une solution optimale. Selon le problème considéré l'algorithme glouton peut ou non produire une solution optimale.*

ALGORITHME DE KRUSKAL (GLOUTON OPTIMISTE) :
ENTRÉE : Un graphe connexe G et une fonction de coût c sur les arêtes de G.
SORTIE : Un arbre couvrant F de G de coût minimum.

Etape 0 : *Prétraitement des données.*
Trier les arêtes de G par ordre de coût non-décroissant : $c(e_1) \leq c(e_2) \leq ... \leq c(e_m)$.
Etape 1 : *Initialisation.*
$F_0 := (V, \emptyset)$.
Etape 2 : *Construction de l'arbre.*
Pour $i = 1$ à m faire :
si $F_{i-1} + e_i$ est une forêt, alors $F_i := F_{i-1} + e_i$,
sinon $F_i := F_{i-1}$.
Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*
$F := F_m$,
STOP.

FIG. 1.53 – Algorithme de Kruskal

Exercice 109 *Exécuter l'algorithme de Kruskal* (FIG. 1.53) *sur le graphe de la* FIG. 1.54.

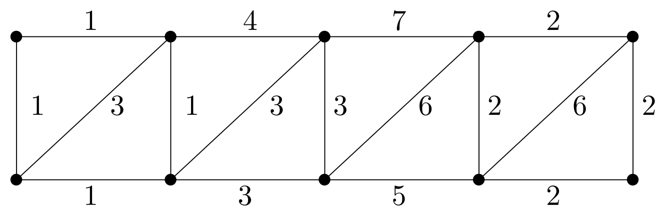

FIG. 1.54 – Graphe et fonction de coût sur les arêtes.

Solution A l'Etape 0 de l'algorithme de Kruskal, on peut choisir l'ordre des arêtes représenté sur la FIG. 1.55. (On remarque que d'autres choix seraient possibles.)

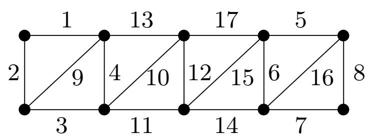

FIG. 1.55 – Un ordre par coût non-décroissant des arêtes du graphe de la FIG. 1.54.

L'étape de construction de l'arbre basée sur cet ordre est illustrée dans la FIG. 1.56. (On n'a représenté que les itérations où une arête a été rajoutée.)

Le coût de l'arbre couvrant obtenu est égal à 20. □

Exercice 110 *Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G. Soient $e_1, \ldots, e_m$ un ordre des arêtes de G par coût non-décroissant et F le graphe obtenu par l'algorithme de Kruskal basé sur cet ordre. Montrer que l'arête e_i $(1 \leq i \leq m)$ appartient à F si et seulement si il existe une coupe de G dont e_i est l'arête d'indice minimum.*

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Supposons donc que l'arête e_i appartient à F, c'est-à-dire que $F_i = F_{i-1} + e_i$. Il en découle, par la Remarque 92, qu'il existe $X \subset V$

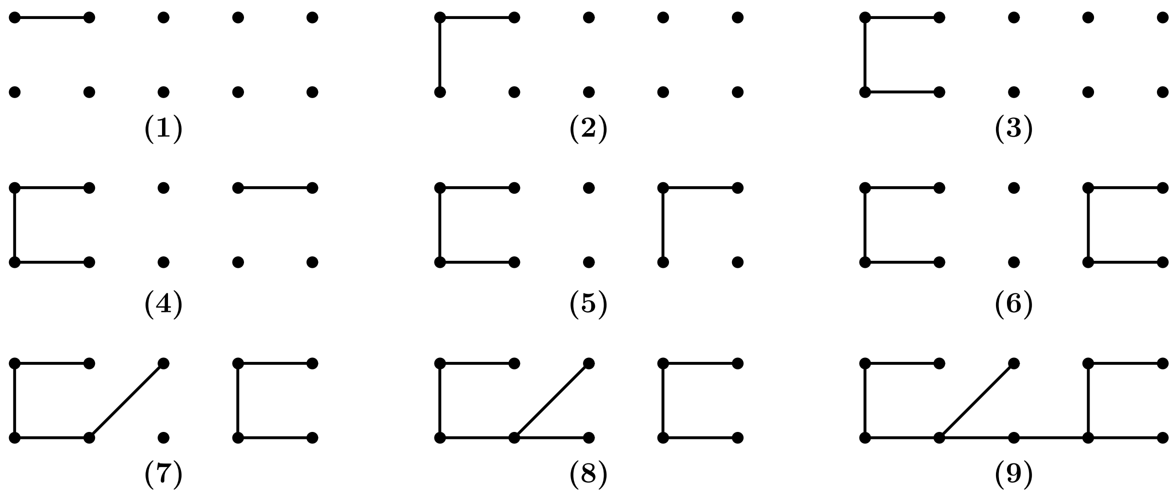

FIG. 1.56 – Déroulement de l'Etape 2 de l'algorithme de Kruskal basé sur l'ordre de la FIG. 1.55.

tel que $e_i = \delta_{F_i}(X)$. Pour tout $j < i$, $E(F_j) \subseteq E(F_{i-1})$, donc $\delta_{F_j}(X) = \emptyset$. Supposons qu'il existe $j < i$ tel que $e_j \in \delta_G(X)$, alors, puisque $\delta_{F_{j-1}}(X) = \emptyset$, par la Remarque 92, $F_j = F_{j-1} + e_j$, et donc $e_j \in \delta_{F_j}(X) = \emptyset$, ce qui est impossible. Par conséquent, e_i est d'indice minimum dans $\delta_G(X)$.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons qu'il existe une coupe $\delta_G(X)$ dont e_i est l'arête d'indice minimum. Puisque les arêtes de F_{i-1} sont d'indices plus petits que i, la coupe $\delta_{F_{i-1}}(X)$ est vide. Par conséquent, e_i est une coupe de $F_{i-1} + e_i$, et donc par la Remarque 92, $F_i = F_{i-1} + e_i$. Puisque $E(F_i) \subseteq E(F)$, e_i appartient à F. □

Remarque 111 *Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G. Soient $e_1, \ldots, e_m$ un ordre des arêtes de G par coût non-décroissant et F le graphe obtenu par l'algorithme de Kruskal basé sur cet ordre. Par l'Exercice 110, pour toute coupe Q de G, F contient l'arête d'indice minimum dans Q.*

Exercice 112 (**Justification de l'algorithme de Kruskal** (FIG. 1.53))

Montrer que F fourni par l'algorithme de Kruskal est un arbre couvrant de G de coût minimum.

Solution On commence par montrer que F est un arbre couvrant de G. A l'Etape 1, F_0 est une forêt, et donc à l'Etape 2, chaque F_i, en particulier $F(= F_m)$, est une forêt aussi. Il reste à vérifier que F est connexe. Pour cela, il suffit de montrer, par l'Exercice 40, que pour un sous-ensemble quelconque X de sommets, on a $|\delta_F(X)| \geq 1$. Puisque G est connexe, d'après l'Exercice 40, $\delta_G(X)$ est non-vide, et soit donc e_i l'arête d'indice minimum dans cette coupe (pour l'ordre calculé à l'Etape 0). Par la Remarque 111, F contient e_i, et par conséquent, $|\delta_F(X)| \geq 1$.

Maintenant il reste à prouver que F est de coût minimum. Pour cela, on va démontrer par récurrence sur i $(0 \leq i \leq m)$, que l'ensemble E_i des arêtes de F_i est dans $\mathcal{F}_{(G,c)}$. Pour $i = 0, E_0 = \emptyset \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. A la i-ième itération de l'Etape 2 $(1 \leq i \leq m)$, si on ne rajoute pas l'arête e_i, alors $E_i = E_{i-1} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Maintenant si l'arête $e_i = uv$ est ajoutée à F_{i-1}, alors, par l'Exercice 110, il existe une coupe Q de G telle que e_i est d'indice minimum dans Q, et par définition de l'ordre des arêtes, e_i est une arête de coût minimum dans Q. Puisque F_{i-1} ne peut contenir que des arêtes d'indice plus petit que i, Q et F_{i-1} sont disjoints. D'après l'hypothèse de récurrence et par l'Exercice 106, $E_i = E_{i-1} \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. □

Exercice 113 *Soient F un graphe partiel d'un graphe G et c une fonction de coût sur les arêtes de G. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) F est un arbre couvrant de G de coût minimum,

(b) F est sans cycle et toute coupe Q de G possède une arête de coût minimum dans Q qui appartient à F,

(c) F est un arbre et toute arête f de F est une arête de coût minimum dans la coupe fondamentale de G associée à $F - f$.

Solution (a) implique **(b)** : On suppose que F est un arbre couvrant de G de coût minimum, donc F est bien sans cycle. Soient Q une coupe quelconque de G et f une arête de coût minimum de Q. Si f appartient à F, alors (b) est bien vérifiée. On suppose donc que f n'appartient pas à F. Soit C_f le cycle fondamental de $F + f$. Puisque le cycle C_f contient une arête de Q (l'arête f), par l'Exercice 57, il en contient une autre, notée e. D'après l'Exercice 96, $F' := F + f - e$ est aussi un arbre couvrant de G, donc par (a), $c(F) \leq c(F') = c(F) + c(f) - c(e)$, c'est-à-dire, $c(e) \leq c(f)$, et puisque f est une arête de coût minimum dans Q, e l'est également. De plus, e est une arête de C_f différente de f, donc e appartient à F.

(b) implique **(c)** : Par (b) et l'Exercice 40, F est connexe et sans cycle, F est donc un arbre. Soient f une arête quelconque de F et Q_f la coupe fondamentale de G associée à $F - f$. Par (b), F contient une arête de coût minimum de Q_f or f est la seule arête de F qui appartient à Q_f.

(c) implique **(a)** : Nous présentons deux démonstrations différentes de cette implication.

Première démonstration : L'arbre F peut être obtenu à partir du graphe $(V, \emptyset)$ en rajoutant les arêtes de F une à une dans un ordre quelconque $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Soient $F_0 = \emptyset$ et $F_i = F_{i-1} + e_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. On va démontrer par récurrence sur i $(0 \leq i \leq n-1)$, que l'ensemble F_i est dans $\mathcal{F}_{(G,c)}$. Pour $i = 0, F_0 = \emptyset \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Supposons que $F_{i-1} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$ pour $i \geq 1$. Par (c), l'arête e_i est de coût minimum dans la coupe fondamentale Q_{e_i} de G associée à $F - e_i$; par la Remarque 93, F_{i-1} et Q_{e_i} sont disjoints ; donc par l'Exercice 106, $F_i = F_{i-1} \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Par conséquent, il existe un arbre de coût minimum qui contient toutes les arêtes de F_{n-1}, or (V, F_{n-1}) est égal à F qui est un arbre ; F est donc un arbre couvrant de G de coût minimum.

Deuxième démonstration : Soit F' un arbre couvrant de G de coût minimum tel que le nombre d'arêtes en commun avec F soit maximum. Si $F = F'$, alors F est un arbre couvrant de G de coût minimum. Supposons donc que F et F' sont distincts. Par (c), F est un arbre, il a donc par l'Exercice 77, le même nombre d'arêtes que F' ; il existe alors une arête f de F qui n'est pas dans F'. Soient Q_f la coupe fondamentale de G associée à $F - f$ et C'_f le cycle fondamental de $F' + f$. Puisque le cycle C'_f contient une arête de Q_f (l'arête f), par l'Exercice 57, il en contient une autre, notée e. Par (c), f est une arête de coût minimum dans Q_f ; or $e \in Q_f$, on a donc

$$c(f) \leq c(e). \tag{1.6}$$

D'après l'Exercice 96, $F'' := F' + f - e$ est aussi un arbre couvrant de G. Puisque F' est un arbre couvrant de G de coût minimum et par (1.6), on obtient

$$c(F') \leq c(F'') = c(F') + c(f) - c(e) \leq c(F').$$

Par conséquent, $c(F') = c(F'')$ et F'' est un arbre couvrant de G de coût minimum. Or e est une arête de Q_f différente de f ; par la Remarque 93, f est l'unique arête de F qui appartient à Q_f ; et donc e n'appartient pas à F. En conclusion, F'' est un arbre couvrant de G de coût minimum ayant une arête de plus que F' en commun avec F ; ce qui est une contradiction. □

Exercice 114 *Soient F un graphe partiel d'un graphe G et c une fonction de coût sur les arêtes de G. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) F est un arbre couvrant de G de coût minimum,

(b) F est connexe et pour tout cycle C de G, il existe une arête de coût maximum dans C qui n'appartient pas à F,

(c) F est un arbre et toute arête e de G qui n'est pas dans F est une arête de coût maximum dans le cycle fondamental de $F + e$.

Solution (a) implique **(b)** : On suppose que F est un arbre couvrant de G de coût minimum, donc F est connexe. Soient C un cycle quelconque de G et e une arête de coût maximum de C. Si e n'appartient pas à F, alors (b) est bien vérifiée. On suppose donc que e appartient à F. Soit Q_e la coupe fondamentale de G associée à $F - e$. Puisque la coupe Q_e contient une arête de C, l'arête e, par l'Exercice 57, elle en contient une autre, notée f. D'après la Remarque 39, $F' := F - e + f$ est aussi un arbre couvrant de G, donc par (a), $c(F) \leq c(F') = c(F) - c(e) + c(f)$, c'est-à-dire, $c(e) \leq c(f)$, et puisque e est une arête de coût maximum dans C, f l'est également. De plus, f est une arête de Q_e différente de e, donc f n'appartient pas à F.

(b) implique **(c)** : Par (b), F est connexe et de plus sans cycle, puisque $E(G) \setminus E(F)$ intersecte tous les cycles de G ; F est donc un arbre. Soient e une arête quelconque de G qui n'appartient pas à F et C_e le cycle fondamental de $F + e$. Par définition, e est la seule arête de C_e qui n'appartient pas à F et donc par (b), c'est une arête de C_e de coût maximum.

(c) implique **(a)** : Soient f une arête quelconque de F et Q_f la coupe fondamentale de G associée à $F - f$. On rappelle que f est la seule arête de F qui appartient à Q_f. Supposons que $Q_f \neq \{f\}$. Soient e une arête quelconque de Q_f distincte de f et C_e le cycle fondamental de $F + e$. On remarque que C_e existe car e n'est pas dans F et que toutes les arêtes de C_e différentes de e sont dans F. Puisque e appartient à la fois à C_e et à Q_f, par l'Exercice 57, il existe une arête qui appartient à la fois à $C_e - e$ et Q_f, donc à F et Q_f, donc c'est l'arête f. Ainsi on a obtenu que l'arête f est dans C_e et par (c), on a $c(e) \geq c(f)$. Puisque cette inégalité est valable pour toutes les arêtes e de Q_f, f est une arête de coût minimum dans Q_f. On a donc démontré que la condition (c) de l'Exercice 113 est vérifiée, et alors par l'Exercice 113, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. □

Remarque 115 *En interchangeant minimum et maximum dans les trois conditions de l'énoncé de l'Exercice 113 ou 114, les trois nouvelles conditions sont toujours équivalentes.*

Exercice 116 *Soient F un graphe partiel d'un graphe G et c une fonction de coût sur les arêtes de G. Montrer que F est un arbre couvrant de G de coût minimum si et seulement si il existe une exécution de l'algorithme de Kruskal qui construit F.*

Solution Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Soit donc F un arbre couvrant de G de coût minimum.

Le seul choix que l'on puisse faire lors de l'exécution de l'algorithme de Kruskal concerne l'ordre attribué aux arêtes de même coût à l'étape 0. Soient $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$ les différentes valeurs des coûts des arêtes de G et E_i l'ensemble des arêtes de G de coût égal à c_i $(1 \leq i \leq k)$. Il existe une exécution de l'étape 0 pour laquelle l'ordre $e_1, \ldots, e_m$ obtenu est tel que pour chaque $i = 1, \ldots, k$, les arêtes de $E_i \cap E(F)$ sont placées avant celles de $E_i \setminus E(F)$.

Soient f une arête quelconque de F et Q_f la coupe fondamentale de G associée à $F - f$. Puisque F est un arbre couvrant de G de coût minimum, par l'Exercice 113, f est une arête de coût minimum dans Q_f et de plus elle est la seule arête de F qui appartient à Q_f. Par la construction de l'ordre, f est donc l'arête d'indice minimum dans Q_f. Par l'Exercice 110, l'algorithme de Kruskal basé sur cet ordre construira F.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons qu'il existe une exécution de l'algorithme de Kruskal qui construit F. D'après l'Exercice 112, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. □

Exercice 117 *Soient F un arbre couvrant d'un graphe G et c une fonction de coût sur les arêtes de G. On suppose que pour toute arête f de F, il existe une coupe de G dont f est une arête de coût minimum. Peut-on en conclure que F est un arbre couvrant de G de coût minimum ?*

Solution La réponse est non, comme le montre l'exemple suivant. Soient G le graphe complet à 3 sommets dont deux arêtes sont de coût 2 et la troisième de coût 1, et F l'arbre couvrant de G constitué des deux arêtes de coût 2. La condition est satisfaite puisque ces deux arêtes forment une coupe dans laquelle elles sont de coût minimum. En remplaçant une des arêtes de F par l'arête de coût 1, on obtient un arbre couvrant de G de coût inférieur à celui de F, donc F n'est pas de coût minimum. □

ALGORITHME DE PRIM :
ENTRÉE : Un graphe connexe $G = (V, E)$ et une fonction de coût c sur E.
SORTIE : Un arbre couvrant F de G de coût minimum.

Etape 1 : *Initialisation.*
  Choisir $v_1 \in V$, $V_1 := \{v_1\}, E_0 := \emptyset$, $n := |V|$.
Etape 2 : *Construction de l'arbre.*
  Pour $i = 1$ à $n - 1$ faire :
    choisir $e_i \in \delta_G(V_i)$ de coût minimum,
    $v_{i+1} :=$ l'extrémité de e_i dans $V \setminus V_i$,
    $V_{i+1} := V_i \cup \{v_{i+1}\}$.
    $E_i := E_{i-1} \cup \{e_i\}$.
Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*
  $F := (V, E_{n-1})$,
  STOP.

FIG. 1.57 – Algorithme de Prim

Exercice 118 *Exécuter l'algorithme de Prim* (FIG. 1.57) *sur le graphe de la* FIG. 1.54.

Solution A l'Etape 1, on peut choisir le sommet le plus haut à gauche dans la FIG. 1.54 comme sommet v_1. A l'Etape 2, la construction de l'arbre est illustrée dans la FIG. 1.58. A l'Etape 3, le coût de l'arbre couvrant obtenu est égal à 20. □

Exercice 119 (**Justification de l'algorithme de Prim** (FIG. 1.57))

(a) Montrer qu'à la i-ième itération de l'Etape 2, l'arête e_i existe pour $1 \leq i \leq n - 1$.

(b) Montrer que (V_{i+1}, E_i) est un arbre pour $0 \leq i \leq n - 1$.

(c) Montrer que $E_i \in \mathcal{F}_{(G,c)}$ pour $0 \leq i \leq n - 1$.

(d) En déduire que F fourni par l'algorithme de Prim est un arbre couvrant de G de coût minimum.

Solution (a) Puisque G est connexe et $\emptyset \neq V_i \neq V$, par l'Exercice 40, $\delta_G(V_i) \neq \emptyset$, et donc e_i existe.

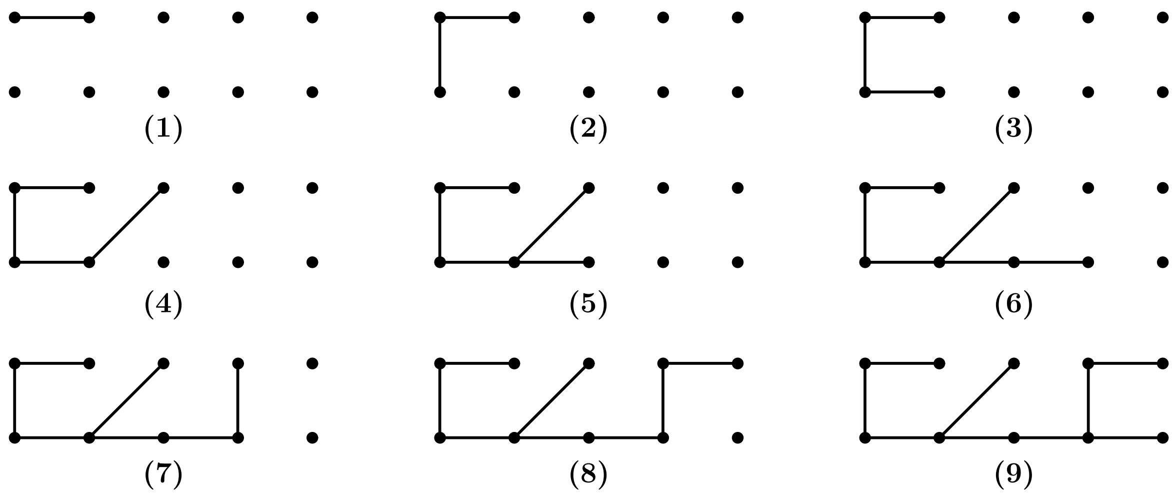

FIG. 1.58 – Déroulement de l'Etape 2 de l'algorithme de Prim

(b) On va procéder par récurrence sur i $(0 \leq i \leq n-1)$. Pour $i = 0, E_0 = \emptyset$, et $(\{v_1\}, \emptyset)$ est un arbre. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour $i - 1 \geq 0$, c'est-à-dire que (V_i, E_{i-1}) est un arbre. Puisque (V_{i+1}, E_i) est obtenu à partir de (V_i, E_{i-1}) en ajoutant le sommet v_{i+1} et l'arête e_i entre v_{i+1} et V_i, par l'Exercice 76, (V_{i+1}, E_i) est un arbre ; la propriété est vraie pour i.

(c) On va procéder par récurrence sur i $(0 \leq i \leq n-1)$. Pour $i = 0, E_0 = \emptyset \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour $i - 1 \geq 0$, c'est-à-dire que $E_{i-1} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$. Par (b) pour $i - 1$, $E_{i-1} \cap \delta_G(V_i) = \emptyset$, de plus e_i est une arête de $\delta_G(V_i)$ de coût minimum, et donc, par l'Exercice 106, on a $E_i = E_{i-1} \cup \{e_i\} \in \mathcal{F}_{(G,c)}$; la propriété est vraie pour i.

(d) Par (b) et (c) pour $i = n - 1$, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. □

ALGORITHME GLOUTON PESSIMISTE :
ENTRÉE : Un graphe connexe G et une fonction de coût c sur les arêtes de G.
SORTIE : Un arbre couvrant F de G de coût minimum.

Etape 0 : *Prétraitement des données.*
Trier les arêtes de G par ordre de coût non-croissant : $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \ldots \geq c(e_m)$.
Etape 1 : *Initialisation.*
$F_0 := G$.
Etape 2 : *Construction de l'arbre.*
Pour $i = 1$ à m faire :
si $F_{i-1} - e_i$ est connexe, alors $F_i := F_{i-1} - e_i$,
sinon $F_i := F_{i-1}$.
Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*
$F := F_m$,
STOP.

FIG. 1.59 – Algorithme glouton pessimiste

Exercice 120 *Exécuter l'algorithme glouton pessimiste* (FIG. 1.59) *sur le graphe de la* FIG. 1.54.

Solution A l'Etape 0 de l'algorithme glouton pessimiste, on peut choisir l'ordre des arêtes représenté sur la FIG. 1.60. (On remarque que d'autres choix seraient possibles.)

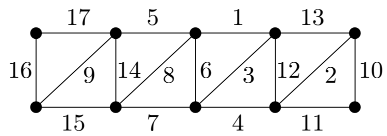

FIG. 1.60 – Un ordre par coût non-croissant des arêtes du graphe de la FIG. 1.54.

L'étape de construction de l'arbre est illustrée dans la FIG. 1.61. (On n'a représenté que les itérations où une arête a été supprimée.)

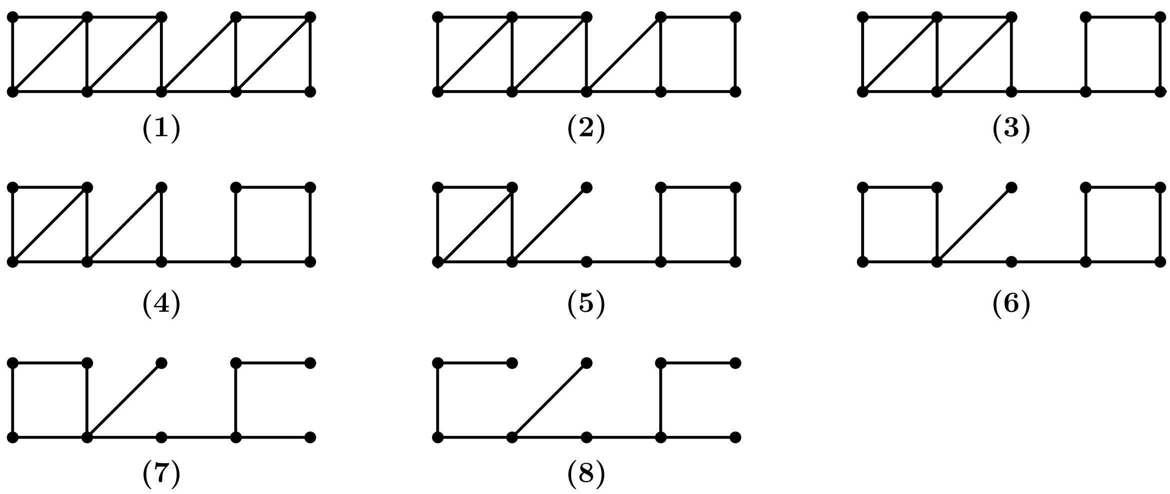

FIG. 1.61 – Déroulement de l'Etape 2 de l'algorithme glouton pessimiste basé sur l'ordre de la FIG. 1.60.

Le coût de l'arbre couvrant obtenu est égal à 20. □

Exercice 121 **(Justification de l'algorithme glouton pessimiste** (FIG. 1.59))
Montrer que F construit par l'algorithme glouton pessimiste est un arbre couvrant de G de coût minimum.

Solution L'algorithme glouton pessimiste construit un graphe F à partir de G en supprimant des arêtes. On remarque que, d'après l'Exercice 42, pour chaque cycle C de G, l'arête de C, qui est la première dans l'ordre calculé à l'Etape 0, est supprimée à l'Etape 2 de l'algorithme. Il en résulte que F est sans cycle. Par le principe de construction, F contient tous les sommets de G et est connexe, c'est donc un arbre couvrant de G. Notre remarque implique de plus que toute arête e de G qui n'est pas dans F est une arête de coût maximum dans le cycle fondamental de $F + e$. Par l'Exercice 114, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. □

Exercice 122 **(Justification de l'algorithme glouton optimiste général** (FIG. 1.62))
Montrer que le graphe F construit par l'algorithme glouton optimiste général vérifie les propriétés suivantes.
(a) F est sans cycle,
(b) F contient une arête de coût minimum de chaque coupe de G,

ALGORITHME GLOUTON OPTIMISTE GÉNÉRAL :
ENTRÉE : Un graphe connexe G et une fonction de coût c sur les arêtes de G.
SORTIE : Un arbre couvrant F de G de coût minimum.

Etape 0 : *Prétraitement des données.*
Prendre un ordre quelconque des arêtes de G : $e_1, e_2, \ldots, e_m$.
Etape 1 : *Initialisation.*
$F_0 := (V, \emptyset)$.
Etape 2 : *Construction de l'arbre.*
Pour $i = 1$ à m faire :
s'il existe un cycle C_i dans $F_{i-1} + e_i$, alors
soit e_i^* une arête de coût maximum de C_i,
$F_i := F_{i-1} + e_i - e_i^*$,
sinon $F_i := F_{i-1} + e_i$.
Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*
$F := F_m$,
STOP.

FIG. 1.62 – Algorithme glouton optimiste général

(c) F est un arbre couvrant de G de coût minimum.

Solution (a) On montre par récurrence que F_i pour $i = 0, 1, \ldots, m$ est sans cycle. Pour $i = 0$, cette propriété est bien vérifiée, en effet F_0 défini à l'Etape 1 n'a aucune arête. Supposons que F_{i-1} soit sans cycle, montrons que F_i l'est aussi.

Si $F_{i-1} + e_i$ ne contient pas de cycle, alors F_i qui lui est égal, non plus.

S'il existe un cycle C_i dans $F_{i-1} + e_i$, alors e_i relie deux sommets distincts d'une composante connexe K de F_{i-1}. Puisque F_{i-1} est sans cycle, K est un arbre et alors par la Remarque 73, C_i est l'unique cycle de $K + e_i$, et donc de $F_{i-1} + e_i$, et ainsi en supprimant e_i^* qui est dans C_i, on obtient un graphe F_i sans cycle.

(b) Supposons par l'absurde que cette propriété n'est pas vérifiée. Soit donc Q une coupe de G dont F ne contient aucune arête de coût minimum. On remarque que, au cours de l'algorithme, pour $i = 1, \ldots, m$, l'arête e_i est rajoutée à F_{i-1} et qu'elle est éventuellement supprimée d'un certain F_j pour $j \geq i - 1$. Nous avons donc supposé que toutes les arêtes de coût minimum de Q ont été supprimées. Soit j le plus grand indice tel que $F_j = F_{j-1} + e_j - e_j^*$ où e_j^* est une arête de coût minimum de Q. Dans ce cas e_j^* appartient au cycle C_j de $F_{j-1} + e_j$. Par l'Exercice 57, Q contient une arête e_k différente de e_j^* appartenant à C_j et donc à F_j. Puisque e_j^* est de coût maximum dans C_j et de coût minimum dans Q, on a $c(e_k) \leq c(e_j^*) \leq c(e_k)$ et donc e_k est de coût minimum dans Q. Par la définition de Q, e_k n'est pas dans F, c'est-à-dire qu'elle a été supprimée et donc il existe un indice $l > j$ tel que $e_k = e_l^*$ ce qui contredit notre hypothèse sur j.

(c) Par (a), (b) et l'Exercice 113, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. □

Exercice 123 (Justification de l'algorithme glouton pessimiste général (FIG. 1.63))

Montrer que le graphe F construit par l'algorithme glouton pessimiste général vérifie les propriétés suivantes.

(a) F est connexe,

(b) pour tout cycle C de G, il existe une arête de coût maximum dans C qui n'appartient pas à F,

(c) F est un arbre couvrant de G de coût minimum.

ALGORITHME GLOUTON PESSIMISTE GÉNÉRAL :
ENTRÉE : Un graphe connexe G et une fonction de coût c sur les arêtes de G.
SORTIE : Un arbre couvrant F de G de coût minimum.

Etape 0 : *Prétraitement des données.*
Prendre un ordre quelconque des arêtes de G : $e_1, e_2, \ldots, e_m$.
Etape 1 : *Initialisation.*
$F_0 := G$.
Etape 2 : *Construction de l'arbre.*
Pour $i = 1$ à m faire :
s'il existe une coupe Q_i de G disjointe de $F_{i-1} - e_i$, alors
soit e_i^* une arête de coût minimum de Q_i,
$F_i := F_{i-1} - e_i + e_i^*$,
sinon $F_i := F_{i-1} - e_i$,
Etape 3 : *Fin de l'algorithme.*
$F := F_m$,
STOP.

FIG. 1.63 – Algorithme glouton pessimiste général

Solution (a) On montre par récurrence que F_i pour $i = 0, 1, \ldots, m$ est connexe. Pour $i = 0$, cette propriété est bien vérifiée, en effet F_0 défini à l'Etape 1 est égal à G qui est connexe. Supposons que F_{i-1} soit connexe et montrons que F_i est connexe lui aussi.

S'il existe une coupe Q_i de G disjointe de $F_{i-1} - e_i$, alors puisque F_{i-1} est connexe, par la Remarque 39, $F_{i-1} - e_i$ a deux composantes connexes et Q_i est égal à l'ensemble des arêtes de G entre ces deux composantes connexes. Puisque e_i^* est une arête de Q_i, par la Remarque 39, F_i qui est obtenu à partir de $F_{i-1} - e_i$ en rajoutant e_i^* est connexe.

S'il n'existe pas de coupe de G disjointe de $F_{i-1} - e_i$, alors par l'Exercice 40, F_i qui est égal à $F_{i-1} - e_i$, est connexe.

(b) Supposons par l'absurde que cette propriété n'est pas vérifiée. Soit donc C un cycle de G dont F contient toutes les arêtes de coût maximum. On remarque que, au cours de l'algorithme, pour $i = 1, \ldots, m$, l'arête e_i est supprimée de F_{i-1} et qu'elle est éventuellement rajoutée à un certain F_j pour $j \geq i - 1$. Nous avons donc supposé que toutes les arêtes de coût maximum de C ont été rajoutées. Soit j le plus grand indice tel que $F_j = F_{j-1} - e_j + e_j^*$ où e_j^* est une arête de coût maximum de C. Dans ce cas e_j^* appartient à la coupe Q_j de G disjointe de $F_{j-1} - e_j$. Par l'Exercice 57, C contient une arête e_k différente de e_j^* appartenant à Q_j et donc pas à F_j. Puisque e_j^* est de coût maximum dans C et de coût minimum dans Q_j, on a $c(e_k) \leq c(e_j^*) \leq c(e_k)$ et donc e_k est de coût maximum dans C. Par la définition de C, e_k est dans F, c'est-à-dire qu'elle a été rajoutée et donc il existe un indice $l > j$ tel que $e_k = e_l^*$ ce qui contredit notre hypothèse sur j.

(c) Par (a), (b), et l'Exercice 114, F est un arbre couvrant de G de coût minimum. □

Exercice 124 *Soient F une forêt d'un graphe connexe G et c une fonction de coût sur les arêtes de G. Proposer un algorithme qui trouve, parmi les arbres couvrants de G contenant les arêtes de F, un arbre de coût minimum.*

Solution Par la Remarque 101, on peut supposer que $c(e) > 0$ pour toute arête e de G. On pose

$$c'(e) := \begin{cases} 0 & \text{si } e \in E(F), \\ c(e) & \text{si } e \in E(G) \setminus E(F). \end{cases}$$

On exécute l'algorithme de Kruskal sur G muni de la fonction de coût c'; et soit T l'arbre couvrant de G ainsi obtenu. Puisque F est une forêt dont les arêtes sont de c'-coût nul et que les autres arêtes de G sont de c'-coûts strictement positifs, toutes les arêtes de F appartiennent à T. Il reste à montrer que si T' est un arbre couvrant quelconque de G contenant les arêtes de F, alors $c(T) \leq c(T')$. Par la définition de c', pour tout sous-ensemble E' d'arêtes de G contenant les arêtes de F, on a

$$c'(E') \quad = \quad c(E') - c(F). \tag{1.7}$$

Par l'Exercice 112, T est un arbre couvrant de G de c'-coût minimum, on a donc

$$c'(T) \leq c'(T')$$

et ainsi par (1.7),

$$\begin{aligned} c(T) &= c'(T) + c(F) \\ &\leq c'(T') + c(F) \\ &= c(T'), \end{aligned}$$

ce qu'on a voulu démontrer. □

Exercice 125 *Soient G un graphe connexe, F un arbre couvrant de G et c une fonction de coût sur les arêtes de G. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) F est un arbre couvrant de G de coût maximum,

(b) pour chaque paire u, v de sommets de G, l'unique chaîne de F entre u et v est une (u, v)-chaîne de capacité maximum dans G.

Solution (a) implique **(b)** : Soient G un graphe connexe et c une fonction de coût sur les arêtes de G (Fig. 1.64 (a)). Supposons que F un arbre couvrant de G de coût maximum (Fig. 1.64 (b)). Nous allons montrer que F vérifie (b). Soient u et v deux sommets de G, P l'unique chaîne de F entre u et v, et e une arête de P dont le coût est égal à la capacité de P (Fig. 1.64 (c)). Soit $\delta_G(X)$ la coupe fondamentale de G associée à $F - e$ (Fig. 1.64 (d)). Remarquons que X contient exactement un des deux sommets u et v.

Considérons maintenant une (u, v)-chaîne quelconque P' de G (Fig. 1.64 (e)). Par l'Exercice 28, il existe une arête f de P' qui est dans $\delta_G(X)$ (Fig. 1.64 (f)). D'après la Remarque 115 et l'Exercice 113, l'arête e est de coût maximum dans $\delta_G(X)$ et ainsi $c(f) \leq c(e)$. Puisque f est une arête de P', la capacité de P' est inférieure ou égale à $c(f)$, et donc inférieure ou égale à $c(e)$ qui est la capacité de P. On en conclut que P est de capacité maximum parmi l'ensemble des (u, v)-chaînes de G.

(b) implique **(a)** : Soit uv une arête de G qui n'appartient pas à F. Soit P la chaîne de F entre u et v. Par (b), la capacité de P est supérieure ou égale à la capacité de la chaîne constituée de l'arête uv. Par conséquent, le coût de chaque arête de P est supérieur ou égal à $c(uv)$. Par l'Exercice 114, F est un arbre couvrant de G de coût maximum. □

Exercice 126 *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Soit $r_G : V \times V \to \mathbb{N}$ la fonction symétrique définie par*

$$r_G(u, v) = \min\{d_G(X) : X \subset V, u \in X, v \in V \setminus X\}.$$

(a) Montrer qu'il existe un arbre $T = (V, F)$ et une fonction c de coût sur F tels que pour chaque paire u, v de sommets de T, l'unique chaîne de F entre u et v soit de capacité égale à $r_G(u, v)$.

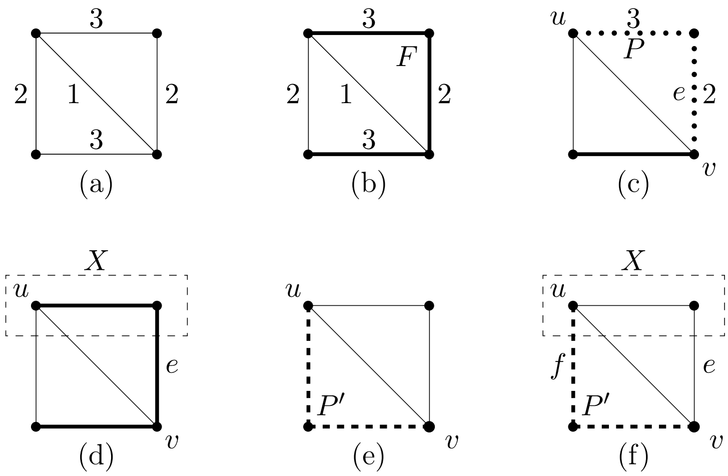

FIG. 1.64 – (a) Le graphe G et les coûts de ses arêtes, (b) un arbre couvrant F de G de coût maximum, (c) la chaîne P de F entre u et v et l'arête e de P de coût minimum, (d) la coupe fondamentale $\delta_G(X)$ de G associée à $F-e$, (e) une (u,v)-chaîne P' de G, (f) l'arête f appartenant à P' et à $\delta_G(X)$.

(b) En déduire que la fonction r_G prend au plus $|V|-1$ valeurs différentes.

Solution (a) Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe (FIG. 1.65 (a)). Remarquons que si un tel arbre T existe, alors, puisque la capacité d'une chaîne composée d'une seule arête est égale au coût de cette arête, on a pour chaque arête ab de T, $c(ab)=r_G(a,b)$. Par conséquent, on définit la fonction de coût c sur les arêtes du graphe complet $K_{|V|}$ sur V (FIG. 1.65 (b)) par

$$c(ab) = r_G(a,b) \text{ pour toute arête } ab \text{ de } K_{|V|}. \tag{1.8}$$

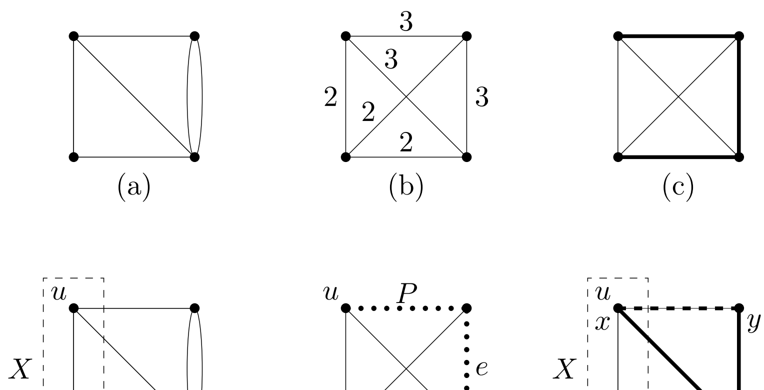

FIG. 1.65 – (a) Le graphe G, (b) le graphe $K_{|V|}$ et les coûts de ses arêtes, (c) un arbre couvrant T de $K_{|V|}$ de coût maximum, (d) un ensemble X qui définit $r_G(u,v)$, (e) la chaîne P et une arête e de P de coût minimum, (f) l'arête xy.

Soit $T=(V,F)$ un arbre couvrant de $K_{|V|}$ de coût maximum (FIG. 1.65 (c)). Nous allons montrer que T convient. Soient u et v deux sommets quelconques de T. Si l'arête $uv \in F$, alors par définition de c et par la remarque ci-dessus, la propriété est vérifiée. On suppose donc que $uv \notin F$.

Par définition de r_G, il existe un sous-ensemble X de V (FIG. 1.65 (d)) tel que $u \in X, v \in V \backslash X$ et

$$d_G(X) = r_G(u, v).$$

De plus, par (1.8),

$$r_G(u, v) = c(uv).$$

Soient P la chaîne unique de T entre u et v et e une arête de P dont le coût est égal à la capacité de P (FIG. 1.65 (e)). D'après la Remarque 115 et l'Exercice 114, uv est de coût minimum dans le cycle $P + uv$ et donc

$$c(uv) \leq c(e).$$

Par l'Exercice 57, le cycle fondamental $P + uv$ de $T + uv$ contient une arête xy de la coupe $\delta_{T+uv}(X)$ telle que $x \in X, y \in V \setminus X$ et $xy \neq uv$ (FIG. 1.65 (f)). Puisque la capacité de P est $c(e)$ et xy est une arête de P, on a

$$c(e) \leq c(xy).$$

Or par (1.8),

$$c(xy) = r_G(x, y).$$

Enfin, par définition de r_G, on a

$$r_G(x, y) \leq d_G(X).$$

Le premier et le dernier terme de la concaténation des inégalités précédentes sont égaux ; ceci implique qu'on a égalité partout, en particulier la valeur $r_G(u, v)$ est égale à la capacité $c(e)$ de P.

(b) Par (a), il existe un arbre $T = (V, F)$ et une fonction c de coût sur F tels que pour chaque paire u, v de sommets de T, l'unique chaîne de T entre u et v soit de capacité égale à $r_G(u, v)$. Or par définition, la capacité d'une chaîne de T est égale au coût d'une de ses arêtes. Puisque par l'Exercice 77, le nombre d'arêtes de T est égal à $|V| - 1$, la fonction r prend au plus $|V| - 1$ valeurs différentes. □

Exercice 127 *On considère le graphe G avec fonction de coût sur les arêtes indiqué sur la* FIG. 1.66.

(a) Exécuter l'algorithme de Kruskal pour trouver un arbre couvrant de G de coût minimum.

(b) Montrer qu'aucun arbre couvrant de G de coût minimum ne contient l'arête e indiquée sur la FIG. 1.66.

(c) Déterminer un arbre couvrant de G contenant e qui soit de coût minimum.

(d) De quelle valeur minimum doit-on diminuer le coût de l'arête e pour qu'il existe un arbre couvrant de G de coût minimum qui contienne e?

Solution (a) En exécutant l'algorithme de Kruskal on peut trouver l'arbre couvrant de G de coût 11 indiqué sur la FIG. 1.67(a). (On remarque qu'il existe d'autres arbres couvrants de G de même coût.)

(b) Nous présentons trois démonstrations différentes.

Première démonstration : Supposons par l'absurde qu'il existe un arbre couvrant F de G de coût minimum qui contient l'arête e. D'après (a), $c(F) = 11$ et comme $c(e) = 3$, la somme des coûts des arêtes de $F - e$ est 8. Par l'Exercice 77, $F - e$ a 6 arêtes. Puisque les coûts sont 1, 2 ou 3 et

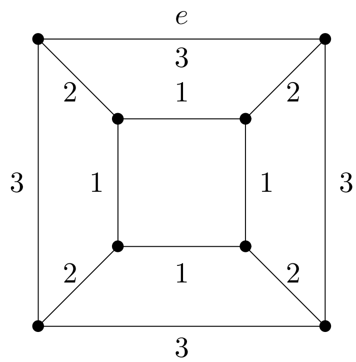

FIG. 1.66 – Graphe, fonction de coût sur les arêtes et l'arête e.

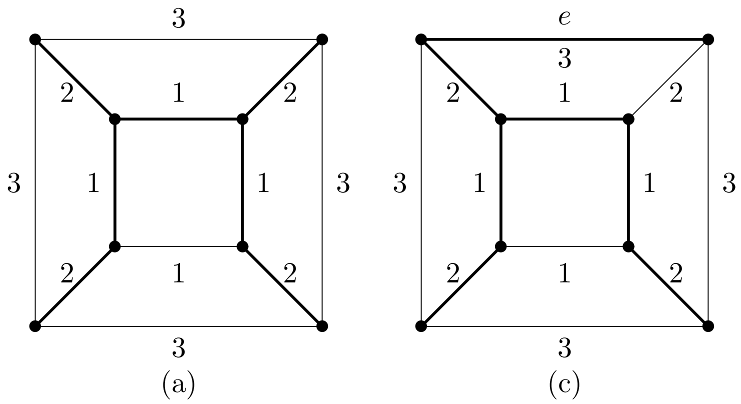

FIG. 1.67 – (a) Un arbre couvrant de G de coût minimum, (c) un arbre couvrant contenant e de coût minimum.

qu'il y a quatre arêtes de coût 1, la seule possibilité est que $F - e$ ait ces quatre arêtes (et deux de coût 2), mais c'est une contradiction car celles-ci forment un cycle.

Deuxième démonstration : Puisque les arêtes de G de coûts 1 ou 2 forment un graphe partiel de G connexe, toute exécution de l'algorithme de Kruskal construira un arbre couvrant de G constitué uniquement de telles arêtes. Par l'Exercice 113, les arêtes de coût 3, en particulier l'arête e, ne sont donc dans aucun arbre couvrant de G de coût minimum.

Troisième démonstration : Considérons le cycle C de longueur 4 et de coût 8 qui contient l'arête e. (C'est le carré supérieur dans la FIG. 1.66.) Dans ce cycle l'arête e est l'unique arête de coût maximum. Par l'Exercice 57, chaque coupe de G contenant e contient une autre arête de C. En conclusion il n'existe pas de coupe de G dont e est une arête de coût minimum. D'après l'Exercice 107, aucun arbre couvrant de G de coût minimum ne contient l'arête e.

(c) Par la réponse à la question (a), le coût minimum d'un arbre couvrant de G est 11. Par (b), il n'y a pas d'arbre couvrant de G contenant e de coût 11. Or les coûts des arêtes sont entiers, et donc l'arbre de la FIG. 1.67(c), qui est de coût 12, est bien de coût minimum parmi les arbres couvrants de G contenant e.

(d) En diminuant de ε le coût de l'arête e, on diminue de ε le coût des arbres couvrants de G contenant e et on ne modifie pas celui des arbres couvrants de G ne contenant pas e. Par les réponses aux questions (a) et (c), le coût minimum d'un arbre couvrant de G est 11 et celui d'un arbre couvrant de G contenant e est 12. Par conséquent, la valeur minimum dont il faut diminuer le coût de l'arête e est égale à 1. $\square$

Soient $G = (V, E)$ un graphe, S un sous-ensemble de V. Un ***S*-connecteur** de G est un sous-ensemble F de E tel que pour tout sommet v en dehors de S, il existe une chaîne de v à un sommet de S dans le graphe partiel $G(F)$. Une ***S*-forêt** de G est un sous-ensemble F de E tel que $G(F)$ est une forêt dont chaque composante connexe contient exactement un sommet de S.

Remarque 128 *F est un S-connecteur si et seulement si chaque composante connexe de $G(F)$ contient au moins un sommet de S. Par conséquent, une S-forêt est un S-connecteur.*

Exercice 129 *Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe, c une fonction de coût strictement positive sur les arêtes de G et S un sous-ensemble non-vide de sommets de G. Le but de l'exercice est de trouver un S-connecteur de G de coût minimum.*

(a) Montrer qu'un S-connecteur de G contient une S-forêt de G.
(b) Soit F un sous-ensemble d'arêtes de G. Montrer que F est un S-connecteur de G de coût minimum si et seulement si F est une S-forêt de G de coût minimum.

Soit G' le graphe obtenu à partir de G en rajoutant un nouveau sommet z et un ensemble Z de nouvelles arêtes sz pour tout sommet $s \in S$. On définit la fonction de coût c' sur les arêtes de G' qui conserve les coûts des arêtes de G et qui attribue un coût nul aux nouvelles arêtes.

(c) Montrer que l'ensemble des arêtes d'un arbre couvrant de G' de c'-coût minimum est égal à la réunion de Z et d'une S-forêt de G.
(d) Soit F' un sous-ensemble d'arêtes de G'. Montrer que $G'(F')$ est un arbre couvrant de G' de c'-coût minimum si et seulement si F' est égal à la réunion de Z et d'une S-forêt F de G de c-coût minimum.
(e) Trouver un S-connecteur de G de coût minimum pour l'exemple de la FIG. 1.68.

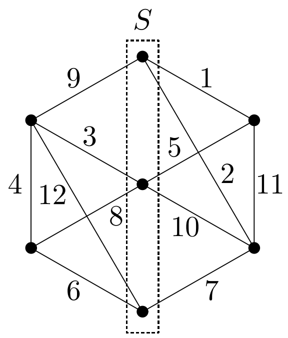

FIG. 1.68 – Le graphe G, les coûts de ses arêtes et l'ensemble de sommets S.

Solution (a) Soit F un S-connecteur de G. On peut choisir $F' \subseteq F$ un S-connecteur minimal, c'est-à-dire qu'aucun sous-ensemble propre de F' n'est un S-connecteur de G. On va montrer que F' est une S-forêt de G.

Si $G(F')$ contenait un cycle C, alors par l'Exercice 42, en supprimant une arête quelconque e de C, les ensembles de sommets des composantes connexes de $G(F' \setminus \{e\})$ resteraient inchangés et donc $F' \setminus \{e\}$ serait un S-connecteur de G, ce qui est une contradiction. Par conséquent, $G(F')$ est une forêt.

Puisque F' est un S-connecteur de G, chaque composante connexe de $G(F')$ contient au moins un sommet de S. Supposons qu'il en existe une, notée K, contenant deux sommets s et s' de S. Soit e une arête appartenant à la chaîne reliant s et s' dans K. Puisque K est un arbre, par la Remarque 91, $K - e$ est une forêt ayant deux composantes connexes K_1 et K_2. De plus, une des deux contient s et l'autre s' car en enlevant l'arête e on a détruit la seule chaîne entre s et s'. Or les composantes connexes de $G(F' \setminus \{e\})$ sont les mêmes que celles de $G(F')$ à l'exception de K qui est remplacée par K_1 et K_2, et donc $F' \setminus \{e\}$ est un S-connecteur de G, ce qui est une contradiction. Par conséquent, F' est bien une S-forêt de G.

(b) Soient F_1 un S-connecteur quelconque de G de coût minimum et F_2 une S-forêt quelconque de G de coût minimum. Par la Remarque 128, F_2 est un S-connecteur de G, et ainsi, puisque F_1 est de coût minimum, on a

$$c(F_1) \leq c(F_2).$$

Par (a), F_1 contient une S-forêt F_3 de G, et ainsi, puisque F_2 est de coût minimum, on a

$$c(F_2) \leq c(F_3).$$

Puisque les coûts sont strictement positifs et que $F_3 \subseteq F_1$, les deux inégalités précédentes impliquent que $F_3 = F_1$ et donc que $c(F_1) = c(F_2)$. Par conséquent, le coût minimum d'un S-connecteur de G est égal au coût minimum d'une S-forêt de G. En conclusion, $F_1 = F_3$ est une S-forêt de G de coût minimum et F_2 est un S-connecteur de G de coût minimum, ce qui donne les conditions respectivement nécessaire et suffisante de (b).

(c) Soit F' l'ensemble des arêtes d'un arbre couvrant de G' de c'-coût minimum. Par l'Exercice 116, il existe une exécution de l'algorithme de Kruskal qui construit l'arbre couvrant $G'(F')$ de G'. Puisque les arêtes de G sont de coût strictement positif et celles dans Z sont de coût nul, à l'étape de prétraitement des données de l'algorithme de Kruskal, les arêtes de Z seront placées avant toutes les autres. Or $G'(Z)$ est une forêt et donc à l'étape de la construction de l'arbre, toutes les arêtes de Z seront ajoutées, autrement dit $Z \subseteq F'$.

En supprimant le sommet z de l'arbre $G'(F')$ on obtient une forêt $G'(F') - z = G(F' \setminus Z)$. Chaque composante connexe de cette forêt contient au moins un voisin de z dans G', puisque $G'(F')$ est connexe, et au plus un, puisque $G'(F')$ est sans cycle, donc exactement un. Or l'ensemble des voisins de z dans G' est égal à S, et par conséquent, $F' \setminus Z$ est une S-forêt de G; ceci termine la démonstration de (c).

(d) Soient F' l'ensemble des arêtes d'un arbre couvrant de G' de c'-coût minimum et F une S-forêt de G de c-coût minimum. Par (c), $F' \setminus Z$ est une S-forêt de G. Puisque F est de c-coût minimum et que les arêtes de Z sont de c'-coût nul, on a

$$c(F) \leq c(F' \setminus Z) = c'(F').$$

Par ailleurs, puisque chaque composante connexe de $G(F)$ contient exactement un sommet de S et donc exactement un voisin de z dans G', $G'(F \cup Z)$ est connexe et sans cycle, autrement dit c'est un arbre couvrant de G'. Puisque F' est de c'-coût minimum et que les arêtes de Z sont de c'-coût nul, on a

$$c'(F') \leq c'(F \cup Z) = c(F).$$

Par les deux inégalités précédentes, le c'-coût minimum d'un arbre couvrant de G' est égal au c-coût minimum d'une S-forêt de G.

En conclusion, F' est la réunion de Z et d'une S-forêt $F' \setminus Z$ de G de c-coût minimum et $G'(F \cup Z)$ est un arbre couvrant de G' de c'-coût minimum, ce qui donne les conditions respectivement nécessaire et suffisante de (d).

(e) Par (b), un S-connecteur de G de coût minimum est égal à une S-forêt de G de coût minimum. Pour trouver une telle S-forêt, par (d), il suffit de trouver un arbre couvrant de coût minimum dans le graphe auxiliaire G' défini dans l'énoncé et d'enlever de cet arbre les nouvelles arêtes. Un tel arbre couvrant peut se déterminer à l'aide de n'importe quel algorithme vu dans ce chapitre. La solution pour l'exemple de la FIG. 1.68 est indiquée sur la FIG. 1.69.

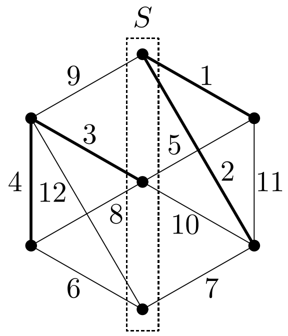

FIG. 1.69 – Les arêtes en gras forment une solution optimale.

□

Considérons la grille $m \times n$ comme un graphe : on appelle **graphe de grille de taille $m \times n$** (FIG. 1.70 (a)) le graphe dont les sommets sont tous les couples d'entiers (i, j) tels que $0 \leq i < n$ et $0 \leq j < m$ et où deux sommets (i, j) et (i', j') sont reliés si $|i - i'| + |j - j'| = 1$. Les arêtes uv où $u = (i, j)$ et $v = (i, j + 1)$ sont dites **verticales** (FIG. 1.70 (b)) et celles où $u = (i, j)$ et $v = (i + 1, j)$ sont dites **horizontales** (FIG. 1.70 (c)). Un sommet (i, j) est dit **de niveau** j. Une arête verticale qui relie un sommet de niveau j à un sommet de niveau $j - 1$ est dite **de type** j pour $j = 1, \ldots, n - 1$ (FIG. 1.70 (d)).

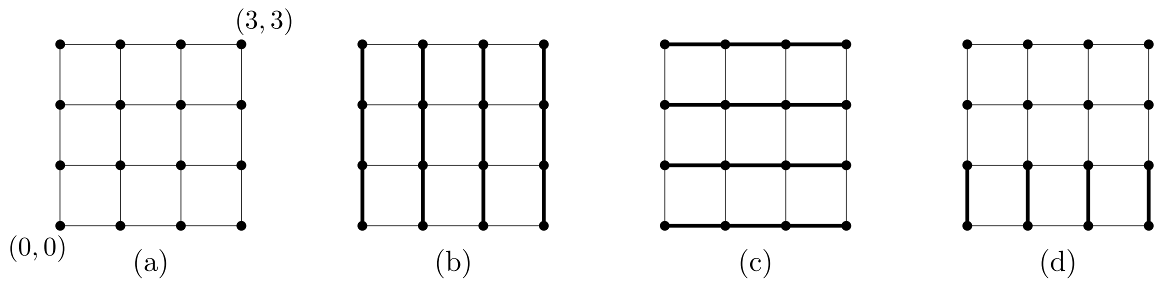

FIG. 1.70 – (a) le graphe de grille de taille 4×4, (b) les arêtes verticales, (c) les arêtes horizontales, (d) les arêtes verticales de type 1.

Remarque 130 *Un graphe de grille est connexe.*

Exercice 131 *Soit (G, c) un réseau où G est le graphe de grille de taille $n \times n$ et le coût d'une arête est égal à 1 si elle est horizontale et à 2 si elle est verticale.*

(a) Quel est le nombre d'arêtes d'un arbre couvrant de G ?

(b) Utiliser l'algorithme de Kruskal pour déterminer un arbre couvrant de G de coût minimum et donner son coût.

(c) Quel est le nombre d'arbres couvrants de G de coût minimum ?

Solution (a) Par la Remarque 130, G est connexe. Le graphe G a n^2 sommets, donc par l'Exercice 77, le nombre d'arêtes d'un arbre couvrant de G est égal à $n^2 - 1$.

(b) Les arêtes horizontales sont de coût minimum et elles seront donc classées en premier par l'étape de prétraitement de l'algorithme de Kruskal. Puisque le graphe partiel induit par ces arêtes ne contient aucun cycle, elles seront toutes ajoutées au cours de la construction de l'arbre. Les arêtes restantes, c'est-à-dire les arêtes verticales, sont toutes de coût 2. Lors de l'étape de prétraitement, elles seront donc placées dans un ordre quelconque à la suite des arêtes horizontales. Au cours de la construction de l'arbre, la première arête verticale de type j dans l'ordre sera ajoutée et les autres rejetées, pour $j = 1, \ldots, n-1$ (FIG. 1.71). En conséquence, le coût de l'arbre obtenu est égal à $n(n-1) + 2(n-1) = (n-1)(n+2)$.

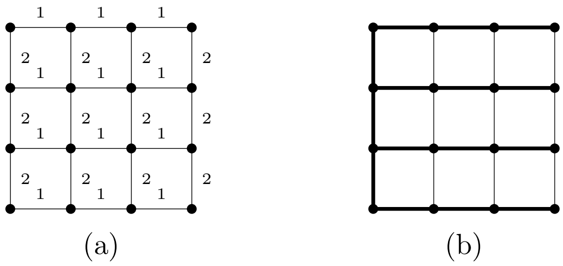

FIG. 1.71 – (a) Coûts des arêtes, (b) Au cours de la construction de l'arbre, sont ajoutées toutes les arêtes horizontales et la première arête verticale de type j pour $j = 1, \ldots, n-1$.

(c) Par ce qui précède, tout arbre couvrant de G de coût minimum contient toutes les arêtes horizontales et exactement une arête verticale de type j et n'importe laquelle, pour $j = 1, \ldots, n-1$. Or pour un j fixé, il y a n arêtes de type j dans G, donc le nombre d'arbres couvrants de G de coût minimum est égal à n^{n-1}. □