Examen de RECHERCHE OPERATIONNELLE

Ensimag 1ère année

27 mai 2014

Durée : 3 heures
Polycopié et tous documents manuscrits autorisés. Calculatrices interdites.
Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction. Vous devez expliquer tout ce que vous faites.
Veuillez noter sur votre copie le nom de votre enseignant : BIENIA ou SZIGETI

Exercice 1 : Une société spécialisée en transport routier dispose d'un budget de **3750000** € pour renouveler son équipement. On a le choix entre trois types de véhicules : $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$. Le véhicule $\boldsymbol{A}$, avec une charge utile de **10** tonnes, peut rouler avec une vitesse moyenne de **70** km/h et coûte **80000** €. Le véhicule $\boldsymbol{B}$, avec une charge utile de **20** tonnes, peut rouler avec une vitesse moyenne de **60** km/h et coûte **130000** €. Le véhicule $\boldsymbol{C}$, qui est une version du $\boldsymbol{B}$ avec compartiment-lit permettant à un chauffeur de dormir (pendant que l'autre conduit), a une charge utile de **18** tonnes et coûte **150000** €.

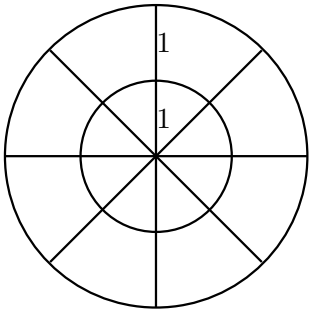
Le véhicule $\boldsymbol{A}$, conduit par un camionneur, peut rouler jusqu'à **6** heures par jour ; si l'on lui affecte deux camionneurs il peut rouler jusqu'à **12** heures et jusqu'à **18** heures par jour si l'on organise un relais de trois camionneurs. Les véhicules $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ nécessitent une équipe de deux camionneurs. Le véhicule $\boldsymbol{B}$ peut rouler jus-qu'à **6** heures, **12** heures ou **18** heures respectivement par jour, en fonction du nombre d'équipes (une, deux ou trois) qui sont lui affectées. Ces limites dans les situations analogues pour le véhicule $\boldsymbol{C}$ vont jusqu'à **7** heures, **14** heures ou **21** heures par jour.

La société emploie actuellement **149** camionneurs et il est impossible d'envisager des embauches supplémentaires. Les garages de la société ne peuvent garantir la maintenance quotidienne de plus de **30** véhicules.

Quel est l'achat optimal qui permet de maximiser la capacité de la société exprimée en tonnes×km par jour ? Modéliser ce problème par un programme linéaire. La solution n'est pas demandée.

Exercice 2 : Soit G un graphe 3-régulier. Montrer que si G possède un cycle hamiltonien alors l'ensemble d'arêtes de G est la réunion de 3 couplages parfaits.

Exercice 3 : Déterminer un arbre de poids minimum dans le graphe ci-dessous avec 17 sommets où les poids des arêtes correspondent à leur longueur géométrique. Donner ce poids total minimum.



Combien y-a-t-il d'arbres couvrants de poids minimum (en supposant que les sommets sont étiquetés) ?

Exercice 4 : Considérons le problème d'ordonnancement simple où les tâches sont tous les diviseurs positifs de $4! = 24$. Le début du projet est 1 et la fin 24. La tâche a précède la tâche b si et seulement si a divise b. La durée d'une tâche est égale à sa valeur.

Quelle est la durée minimum du projet ? Quelles sont les tâches critiques ? Quelles tâches ont la plus grande marge ?

Utiliser la méthode potentiels-tâches (graphe des tâches). Pour accélérer les calculs il est conseillé d'enlever les arcs de transitivité.

Exercice 5 : Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} \min \quad 2x_1 + 1x_3 \\ \text{sous les contraintes} \\ 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \geq 5 \\ 1x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}$$

(a) Résoudre ce programme linéaire par l'algorithme du simplexe.

(b) Pour le moment le coefficient de x_1 dans la fonction-objectif z est 2. A partir de quelle valeur de ce coefficient verra-t-on apparaître une valeur de x_1 non nulle dans la solution optimale ? Expliquez clairement pourquoi.

Exercice 6 :

Deux joueurs X et Y doivent choisir simultanément une mise de 1 € ou 5 €. Si les mises des deux joueurs sont identiques alors le joueur X gagne la mise de son adversaire, sinon c'est le joueur Y qui gagne la mise de X.

(a) Donner la matrice des gains.

(b) Ecrire les deux programmes linéaires (duaux) qui correspondent à la recherche des stratégies mixtes optimales des deux joueurs.

(c) Utiliser la méthode graphique vue en cours pour trouver la stratégie mixte optimale du joueur X.

(d) En utilisant cette stratégie mixte optimale du joueur X, déterminer la stratégie mixte optimale du joueur Y par le théorème des écarts complémentaires.

(e) Quelle est la valeur du jeu ? Ce jeu est-il juste (équitable) ?