Examen de RECHERCHE OPERATIONNELLE
Ensimag 1ère année
22 mai 2012

Durée : 3heures
Tous documents manuscrits autorisés.
ATTENTION : il sera tenu le plus grand compte de la rédaction. Vous devez expliquer tout ce que vous faites.
Veuillez noter sur votre copie le nom de votre enseignant : BIENIA ou NADDEF ou SZIGETI

Exercice 1 : Dans un domaine de ski de fond les pistes sont tracées en sens unique pour éviter les collisions éventuelles. Le plan des pistes de plusieurs domaines est représenté FIG. 1. Un skieur curieux, mais paresseux, voudrait passer par chaque tronçon exactement une fois tout en revenant au point de départ à la fin de son parcours. Pouvez-vous, pour chaque station de ski de la FIG. 1, aider le skieur à décider son trajet ou bien le convaincre que son objectif est impossible à réaliser ?

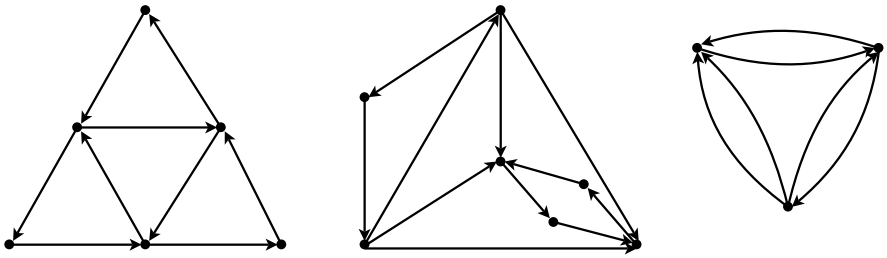

FIG. 1 – Trois domaines de ski de fond.

Exercice 2 : Une arborescence p-aire de racine r est une arborescence telle que de chaque sommet non feuille il sorte exactement p arcs. En d'autres termes on peut voir cela comme un arbre en informatique avec une racine et chaque sommet qui n'est pas une feuille a p fils. Si $p = 2$ c'est un arbre binaire. Un sommet ou noeud qui n'est pas une feuille est dit interne.

1. Montrer que toutes les arborescences p-aire avec un nombre fixé f de feuilles ont le même nombre de sommets internes.
2. Quelle relation f et p doivent-ils satisfaire pour qu'un tel arbre existe ?

Aide : on calculera de 2 façons différentes le nombre d'arcs.

Exercice 3 : Les aéroports desservis successivement par un avion sont marqués par t qui varie de 1 à N. Le réservoir de carburant de l'avion possède une capacité limité à R. La consommation du carburant est optimisée si avant chaque décollage en t, on remplit le réservoir juste avec la quantité c_t (en litres) de carburant nécessaire pour effectuer le trajet entre t et $t + 1$ ($t = 1, 2, \ldots, N_1$). Le prix p_t (euro par litre) de carburant étant différent à chaque aéroport t, il est parfois intéressant d'acheter plus de carburant (dans la limite de capacité du réservoir) que le minimum nécessaire pour effectuer le trajet entre t et $t + 1$. Si cette décision est prise, il faut tenir compte de l'augmentation de consommation du carburant dû à la surcharge. Supposons que l'avion va consommer dans ce cas un pourcentage s_t de carburant en plus de la quantité c_t consommée normalement

(sans surcharge). Admettons que ces paramètres c_t, p_t et s_t $(t = 1, 2, \ldots, N_1)$ sont des constantes données (s_t ne varie pas en fonction de la surcharge).

Ecrire le programme linéaire qui permet de déterminer les quantités x_t $(t = 1, 2, \ldots, N_1)$ de carburant à acheter à chaque arrêt t qui minimisent le coût total du carburant pour effectuer ces $N - 1$ vols. La solution n'est pas demandée.

Exercice 4 : Considérons le programme linéaire :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &\geq 1 \\ 1x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\geq -3 \\ -x_1 \qquad + 1x_3 &\geq 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= z(\min) \end{aligned}$$

Comment résoudre ce programme linéaire ? Le faire.

Exercice 5 : Les joueurs A et B ont chacun des pièces de a et b centimes d'Euro. Chacun prend dans sa main fermée une pièce puis ensemble ils montrent leur pièce. Si les pièces montrées sont les mêmes A gagne la pièce de son adversaire, sinon il perd sa pièce.

1. Montrer que la stratégie optimale de A est de montrer a et b avec probabilité $b/(a+b)$ et $a/(a+b)$ respectivement.
2. Quelle est alors la stratégie optimale de B ?