# Recherche Opérationnelle 1A
# Programmation Linéaire
# Étape 1 de l'algorithme du simplexe

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

# Énoncé de l'EXO. 8.3.

- Dans un atelier on peut fabriquer quatre types de cartes électroniques **I**, **II**, **III** et **IV** que se vendent toutes à prix unique de **40**€ l'unité.
- Les coûts de production sont différents pour chaque carte (respectivement **10**€, **18**€, **18**€ et **32**€ par carte) et varient linéairement en fonction du nombre de cartes fabriquées.
- Les composantes sont disponibles en quantité illimitée mais la principale contrainte réside dans le temps.
- Chaque semaine l'atelier dispose de seulement
  1. **2000** heures de temps de production,
  2. **300** heures pour la vérification du fonctionnement et
  3. **160** heures peuvent être consacrées à l'empaquetage.
- Les cartes nécessitent respectivement :
  1. **40**, **40**, **30** et **10** minutes de production par pièce,
  2. **4**, **5**, **3** et **2** minutes pour la vérification du fonctionnement et
  3. **2**, **2**, **1** et **1** minute pour l'empaquetage.

# Énoncé de l'EXO. 8.3.

(a) Ecrire et résoudre le programme linéaire qui modélise le problème de la maximisation du profit net, quand on décide de fabriquer seulement les cartes dont la marge bénéficiaire dépasse **25**% du prix unitaire de vente.

(b) Est-ce que la possibilité de l'introduction à la production de la carte abandonnée dans (a) change le plan optimal ? Que se passe-t-il ?

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | | | | | |
| Vérification | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | | | | | |
| Vérification | | | | | |
| Empaquetage | | | | | |
| | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | | | | | |
| Vérification | | | | | |
| Empaquetage | | | | | |
| | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | | | | | |
| Vérification | | | | | |
| Empaquetage | | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | | | | |
| Vérification | | | | | |
| Empaquetage | | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | | | |
| Vérification | | | | | |
| Empaquetage | | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | | |
| Vérification | | | | | |
| Empaquetage | | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | |
| Vérification | | | | | |
| Empaquetage | | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | | | | | |
| Empaquetage | | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | | | | |
| Empaquetage | | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | | | |
| Empaquetage | | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | | |
| Empaquetage | | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | |
| Empaquetage | | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I :

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} =$

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$,

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II :

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} =$

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$,

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$, III :

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$, III : $\frac{22}{40} =$

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$, III : $\frac{22}{40} = 55\%$,

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$, III : $\frac{22}{40} = 55\%$, IV :

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$, III : $\frac{22}{40} = 55\%$, IV : $\frac{8}{40} =$

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$, III : $\frac{22}{40} = 55\%$, IV : $\frac{8}{40} = 20\%$,

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$, III : $\frac{22}{40} = 55\%$, IV : $\frac{8}{40} = 20\%$,
   on ne fabriquera donc pas la carte IV.

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$, III : $\frac{22}{40} = 55\%$, IV : $\frac{8}{40} = 20\%$,
   on ne fabriquera donc pas la carte IV.
3. Il s'agit d'un problème de production, le PL est donc :

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$, III : $\frac{22}{40} = 55\%$, IV : $\frac{8}{40} = 20\%$,
   on ne fabriquera donc pas la carte IV.

3. Il s'agit d'un problème de production, le PL est donc :

$$\begin{aligned} 40x_1 + 40x_2 + 30x_3 &\leq 120000 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 18000 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 &\leq 9600 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \\ 30x_1 + 22x_2 + 22x_3 &= z(\max) - 0 \end{aligned}$$

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

1. Tableau de données :

| Cartes | I | II | III | IV | disp. |
|---|---|---|---|---|---|
| Production | **40** | **40** | **30** | **10** | **120000** |
| Vérification | **4** | **5** | **3** | **2** | **18000** |
| Empaquetage | **2** | **2** | **1** | **1** | **9600** |
| Profit | **30** | **22** | **22** | **8** | |

2. La marge bénéficiaire du prix unitaire de vente :
   I : $\frac{30}{40} = 75\%$, II : $\frac{22}{40} = 55\%$, III : $\frac{22}{40} = 55\%$, IV : $\frac{8}{40} = 20\%$,
   on ne fabriquera donc pas la carte IV.

3. Il s'agit d'un problème de production, le PL est donc :

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leq 12000 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 18000 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 &\leq 9600 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \\ 30x_1 + 22x_2 + 22x_3 &= z(\max) - 0 \end{aligned}$$

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

La forme standard du PL est la suivante :

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

La forme standard du PL est la suivante :

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
4x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +1y_1 & & & = 12000 \\
4x_1 & +5x_2 & +3x_3 & & +1y_2 & & = 18000 \\
2x_1 & +2x_2 & +1x_3 & & & +1y_3 & = 9600 \\
x_1, & x_2, & x_3, & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 \\
30x_1 & +22x_2 & +22x_3 & & & & = z(\max) - 0
\end{array}
$$

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

La forme standard du PL est la suivante :

$$\begin{array}{rrrrrrr}
4x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +1y_1 & & & = 12000 \\
4x_1 & +5x_2 & +3x_3 & & +1y_2 & & = 18000 \\
2x_1 & +2x_2 & +1x_3 & & & +1y_3 & = 9600 \\
x_1, & x_2, & x_3, & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 \\
30x_1 & +22x_2 & +22x_3 & & & & = z(\max) - 0
\end{array}$$

Forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{4, 5, 6\}$.

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 3 | 1 | 0 | 0 | 12000 |
| 4 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 18000 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9600 |
| 30 | 22 | 22 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ | 4 | 3 | 1 | 0 | 0 | 12000 |
| 4 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 18000 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9600 |
| 30 | 22 | 22 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 3000 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 6000 |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 3600 |
| 0 | -8 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{15}{2}$ | 0 | 0 | $-90000$ |

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ | 4 | 3 | 1 | 0 | 0 | 12000 |
| 4 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 18000 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9600 |
| 30 | 22 | 22 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 3000 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 6000 |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 3600 |
| 0 | -8 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{15}{2}$ | 0 | 0 | $-90000$ |

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs,

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ | 4 | 3 | 1 | 0 | 0 | 12000 |
| 4 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 18000 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9600 |
| 30 | 22 | 22 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 3000 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 6000 |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 3600 |
| 0 | -8 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{15}{2}$ | 0 | 0 | $-90000$ |

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs, $\{1, 5, 6\}$ est donc une base réalisable optimale.

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ | 4 | 3 | 1 | 0 | 0 | 12000 |
| 4 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 18000 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9600 |
| 30 | 22 | 22 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 3000 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 6000 |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 3600 |
| 0 | -8 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{15}{2}$ | 0 | 0 | $-90000$ |

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs, $\{1, 5, 6\}$ est donc une base réalisable optimale.
- La solution de base optimale associée est

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ | 4 | 3 | 1 | 0 | 0 | 12000 |
| 4 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 18000 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9600 |
| 30 | 22 | 22 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 3000 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 6000 |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 3600 |
| 0 | -8 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{15}{2}$ | 0 | 0 | $-90000$ |

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs, $\{1, 5, 6\}$ est donc une base réalisable optimale.
- La solution de base optimale associée est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3) = (3000, 0, 0, 0, 6000, 3600)$.

# EXO. 8.3.

## Solution (a)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ | 4 | 3 | 1 | 0 | 0 | 12000 |
| 4 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 18000 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9600 |
| 30 | 22 | 22 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 3000 |
| 0 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 6000 |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 3600 |
| 0 | -8 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{15}{2}$ | 0 | 0 | $-90000$ |

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs, $\{1, 5, 6\}$ est donc une base réalisable optimale.
- La solution de base optimale associée est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3) = (3000, 0, 0, 0, 6000, 3600)$.
- La solution optimale du PL initial est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = (3000, 0, 0)$.

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

Le nouveau PL est le suivant :

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

Le nouveau PL est le suivant :

$$
\begin{array}{rrrrl}
4x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 + & 1x_4 & \leq 12000 \\
4x_1 + & 5x_2 + & 3x_3 + & 2x_4 & \leq 18000 \\
2x_1 + & 2x_2 + & 1x_3 + & 1x_4 & \leq 9600 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \\
30x_1 + & 22x_2 + & 22x_3 + & 8x_4 & = z(\max) - 0
\end{array}
$$

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

Le nouveau PL est le suivant :

$$
\begin{array}{rrrrl}
4x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 + & 1x_4 & \leq 12000 \\
4x_1 + & 5x_2 + & 3x_3 + & 2x_4 & \leq 18000 \\
2x_1 + & 2x_2 + & 1x_3 + & 1x_4 & \leq 9600 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \\
30x_1 + & 22x_2 + & 22x_3 + & 8x_4 & = z(\max) - 0
\end{array}
$$

dont la forme standard est :

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

Le nouveau PL est le suivant :

$$
\begin{array}{rrrrl}
4x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 + & 1x_4 & \leq 12000 \\
4x_1 + & 5x_2 + & 3x_3 + & 2x_4 & \leq 18000 \\
2x_1 + & 2x_2 + & 1x_3 + & 1x_4 & \leq 9600 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \\
30x_1 + & 22x_2 + & 22x_3 + & 8x_4 & = z(\max) - 0
\end{array}
$$

dont la forme standard est :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
4x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 + & 1x_4 + & 1y_1 & & & & = 12000 \\
4x_1 + & 5x_2 + & 3x_3 + & 2x_4 & & + 1y_2 & & & = 18000 \\
2x_1 + & 2x_2 + & 1x_3 + & 1x_4 & & & + 1y_3 & & = 9600 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & y_1, & y_2, & y_3 & & \geq 0 \\
30x_1 + & 22x_2 + & 22x_3 + & 8x_4 & & & & & = z(\max) - 0
\end{array}
$$

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

Le nouveau PL est le suivant :

$$\begin{array}{rrrrl}
4x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 + & 1x_4 & \leq 12000 \\
4x_1 + & 5x_2 + & 3x_3 + & 2x_4 & \leq 18000 \\
2x_1 + & 2x_2 + & 1x_3 + & 1x_4 & \leq 9600 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \\
30x_1 + & 22x_2 + & 22x_3 + & 8x_4 & = z(\max) - 0
\end{array}$$

dont la forme standard est :

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
4x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 + & 1x_4 + & 1y_1 & & & & = 12000 \\
4x_1 + & 5x_2 + & 3x_3 + & 2x_4 & & + 1y_2 & & & = 18000 \\
2x_1 + & 2x_2 + & 1x_3 + & 1x_4 & & & + 1y_3 & & = 9600 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & y_1, & y_2, & y_3 & & \geq 0 \\
30x_1 + & 22x_2 + & 22x_3 + & 8x_4 & & & & & = z(\max) - 0
\end{array}$$

Forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{5, 6, 7\}$.

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 12000 |
| 4 | 5 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 18000 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9600 |
| 30 | 22 | 22 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ | 4 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 12000 |
| 4 | 5 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 18000 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9600 |
| 30 | 22 | 22 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 3000 |
| 0 | 1 | 0 | $\boxed{1}$ | -1 | 1 | 0 | 6000 |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 3600 |
| 0 | -8 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{15}{2}$ | 0 | 0 | -90000 |

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{4}$ | 4 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 12000 |
| 4 | 5 | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 | 18000 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9600 |
| 30 | 22 | 22 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 3000 |
| 0 | 1 | 0 | $\boxed{1}$ | -1 | 1 | 0 | 6000 |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 3600 |
| 0 | -8 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{15}{2}$ | 0 | 0 | -90000 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 1500 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 6000 |
| 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 600 |
| 0 | $-\frac{17}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | -7 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | -93000 |

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs,

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs, $\{1, 4, 7\}$ est donc une base réalisable optimale.

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs, $\{1, 4, 7\}$ est donc une base réalisable optimale.
- La solution de base optimale associée est

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs, $\{1, 4, 7\}$ est donc une base réalisable optimale.
- La solution de base optimale associée est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3) = (1500, 0, 0, 6000, 0, 0, 600)$.

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs, $\{1, 4, 7\}$ est donc une base réalisable optimale.
- La solution de base optimale associée est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3) = (1500, 0, 0, 6000, 0, 0, 600)$.
- La solution optimale du PL initial est

# EXO. 8.3.

## Solution (b)

- Tous les coefficients dans la fonction objectif sont non-positifs, $\{1, 4, 7\}$ est donc une base réalisable optimale.
- La solution de base optimale associée est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3) = (1500, 0, 0, 6000, 0, 0, 600)$.
- La solution optimale du PL initial est $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4) = (1500, 0, 0, 6000)$.

# Etape 1 de l'algorithme du simplexe

## Définition

Un PL avec $b \geq 0$ et le PL auxiliaire :

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{l} A \cdot x = b \\ x \geq 0 \end{array} \qquad \text{(P')} \quad \begin{array}{rl} A \cdot x + I \cdot y = b & \\ x, \quad y \geq 0 & \\ (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x & = z'(\max) + \mathbf{1}^T \cdot b \end{array}$$

## Théorème

Il existe une solution réalisable de (P) si et seulement si $z'(\max) = 0$.

## Remarque

1. Les variables de $y$ forment une base réalisable du (P'), puisque on a la matrice identité et $b \geq 0$,
2. (P') est sous forme standard par rapport à $y$.
3. On peut le résoudre avec l'Etape 2.

# EXO 8.5.

## Énoncé

Trouver une solution réalisable de base du système suivant en appliquant l'Etape 1 de l'algorithme du simplexe.

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 &= 4 \\ 1x_1 - 1x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

# EXO 8.5.

## Solution

$$
\begin{array}{llll}
1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 & & & = 4 \\
1x_1 - 1x_2 - 2x_3 - 3x_4 & & & = 2 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \geq 0
\end{array}
$$

# EXO 8.5.

## Solution

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 &= 4 \\ 1x_1 - 1x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Le PL auxiliaire est le suivant :

# EXO 8.5.

## Solution

$$\begin{array}{llll} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 & & & = 4 \\ 1x_1 - 1x_2 - 2x_3 - 3x_4 & & & = 2 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 & & & \geq 0 \end{array}$$

Le PL auxiliaire est le suivant :

$$\begin{array}{llllll} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1y_1 & & & & = 4 \\ 1x_1 - 1x_2 - 2x_3 - 3x_4 & & & + 1y_2 & = 2 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, & & y_1, & y_2 & \geq 0 \\ 2x_1 & - 1x_3 - 2x_4 & & & = z'(\max) + 6 \end{array}$$

# EXO 8.5.

## Solution

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| **1** | -1 | -2 | -3 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | -1 | -2 | 0 | 0 | 6 |

# EXO 8.5.

## Solution

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| **1** | -1 | -2 | -3 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | -1 | -2 | 0 | 0 | 6 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | **4** | 1 | -1 | 2 |
| 1 | -1 | -2 | -3 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 3 | 4 | 0 | -2 | 2 |

# EXO 8.5.

## Solution

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| **1** | -1 | -2 | -3 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | -1 | -2 | 0 | 0 | 6 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | **4** | 1 | -1 | 2 |
| 1 | -1 | -2 | -3 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 3 | 4 | 0 | -2 | 2 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 |

# EXO 8.5.

## Solution

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| **1** | -1 | -2 | -3 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | -1 | -2 | 0 | 0 | 6 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | **4** | 1 | -1 | 2 |
| 1 | -1 | -2 | -3 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 3 | 4 | 0 | -2 | 2 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 |

Puisque $c_s = 0$, on s'arrête avec $z'(\max) = 0$,

# EXO 8.5.

## Solution

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| **1** | -1 | -2 | -3 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | -1 | -2 | 0 | 0 | 6 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | **4** | 1 | -1 | 2 |
| 1 | -1 | -2 | -3 | 0 | 1 | 2 |
| 0 | 2 | 3 | 4 | 0 | -2 | 2 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 |

Puisque $c_s = 0$, on s'arrête avec $z'(\max) = 0$, $\{4, 1\}$ est donc une base réalisable du PL initial.

# EXO 8.5.

## Remarque

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 |

# EXO 8.5.

## Remarque

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 |

La forme standard du PL initial par rapport à $\{4, 1\}$ est :

# EXO 8.5.

## Remarque

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 |

La forme standard du PL initial par rapport à $\{4, 1\}$ est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + 1x_4 &= \frac{1}{2} \\ 1x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 &= \frac{7}{2} \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

# EXO 8.6.

## Énoncé

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) En étudiant la soustraction de deux lignes conclure que ce système n'a pas de solution réalisable.

(b) Appliquer à ce système l'Etape 1 de l'algorithme du simplexe.

# EXO 8.6.

## Solution (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

# EXO 8.6.

## Solution (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lemme de Farkas : Il n'existe pas de solution réalisable de ce système si et seulement si il existe un vecteur $\overline{y}$ tel que $\overline{y}^T A \geq 0$ et $\overline{y}^T b < 0$.

# EXO 8.6.

## Solution (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lemme de Farkas : Il n'existe pas de solution réalisable de ce système si et seulement si il existe un vecteur $\overline{y}$ tel que $\overline{y}^T A \geq 0$ et $\overline{y}^T b < 0$.

Pour $\overline{y}^T = (1, -1)$ :

# EXO 8.6.

## Solution (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lemme de Farkas : Il n'existe pas de solution réalisable de ce système si et seulement si il existe un vecteur $\overline{y}$ tel que $\overline{y}^T A \geq 0$ et $\overline{y}^T b < 0$.

Pour $\overline{y}^T = (1, -1)$ : $\quad 1x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -1$

# EXO 8.6.

## Solution (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lemme de Farkas : Il n'existe pas de solution réalisable de ce système si et seulement si il existe un vecteur $\overline{y}$ tel que $\overline{y}^T A \geq 0$ et $\overline{y}^T b < 0$.

Pour $\overline{y}^T = (1, -1)$ : $\quad 0 \leq 1x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -1$

# EXO 8.6.

## Solution (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 3 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lemme de Farkas : Il n'existe pas de solution réalisable de ce système si et seulement si il existe un vecteur $\overline{y}$ tel que $\overline{y}^T A \geq 0$ et $\overline{y}^T b < 0$.

Pour $\overline{y}^T = (1, -1)$ : $\quad 0 \leq 1x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -1 < 0.$

# EXO 8.6.

## Solution (b)

$$
\begin{array}{rrrl}
2x_1 + 3x_2 - & 5x_3 & & = 2 \\
1x_1 - 4x_2 - & 8x_3 & & = 3 \\
x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

# EXO 8.6.

## Solution (b)

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 + 3x_2 - & 5x_3 & = 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - & 8x_3 & = 3 \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Le PL auxiliaire est le suivant:

# EXO 8.6.

## Solution (b)

$$\begin{array}{rrrl} 2x_1 + 3x_2 - & 5x_3 & & = 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - & 8x_3 & & = 3 \\ x_1, \quad x_2, & x_3 & & \geq 0 \end{array}$$

Le PL auxiliaire est le suivant:

$$\begin{array}{rrrrrl} 2x_1 + 3x_2 - & 5x_3 + 1y_1 & & & & = 2 \\ 1x_1 - 4x_2 - & 8x_3 & & + 1y_2 & & = 3 \\ x_1, \quad x_2, & x_3, & y_1, & y_2 & & \geq 0 \\ 3x_1 - 1x_2 - & 13x_3 & & & & = z'(\max) + 5 \end{array}$$

# EXO 8.6.

## Solution

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | -5 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | -4 | -8 | 0 | 1 | 3 |
| 3 | -1 | -13 | 0 | 0 | 5 |

# EXO 8.6.

## Solution

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{2}$ | 3 | -5 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | -4 | -8 | 0 | 1 | 3 |
| 3 | -1 | -13 | 0 | 0 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 |
| 0 | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |
| 0 | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | 2 |

# EXO 8.6.

## Solution

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | -5 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | -4 | -8 | 0 | 1 | 3 |
| 3 | -1 | -13 | 0 | 0 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 |
| 0 | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |
| 0 | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | 2 |

Puisque $c_s = -\frac{3}{2} < 0$, on s'arrête avec $z'(\max) = -2$

# EXO 8.6.

## Solution

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | -5 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | -4 | -8 | 0 | 1 | 3 |
| 3 | -1 | -13 | 0 | 0 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 |
| 0 | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |
| 0 | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | 2 |

Puisque $c_s = -\frac{3}{2} < 0$, on s'arrête avec $z'(\max) = -2 \neq 0$,

# EXO 8.6.

## Solution

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | -5 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | -4 | -8 | 0 | 1 | 3 |
| 3 | -1 | -13 | 0 | 0 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 |
| 0 | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |
| 0 | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | 2 |

Puisque $c_s = -\frac{3}{2} < 0$, on s'arrête avec $z'(\max) = -2 \neq 0$,
il n'existe donc pas de solution réalisable du PL initial.

# EXO 8.7.

## Énoncé

Appliquer l'algorithme du simplexe pour résoudre le programme linéaire suivant.

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &\geq 2 \\
1x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\
x_2 &\leq 4 \\
x_1 \quad x_2 &\geq 0 \\
3x_1 - 1x_2 &= z(\max)
\end{aligned}
$$

# EXO 8.7.

## Solution

1. On ajoute les nouvelles variables $x_3,\ x_4,\ x_5$ qui sont non-négatives et on obtient le programme linéaire suivant $P_2$:

$$\begin{array}{rrrrrl} -2x_1 & -1x_2 & +1x_3 & & & = -2 \\ 1x_1 & +3x_2 & & +1x_4 & & = 3 \\ & x_2 & & & +1x_5 & = 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq 0 \\ 3x_1 & -1x_2 & & & & = z(\max) \end{array}$$

2. Soit $J := \{3,\ 4,\ 5\}$.
3. Alors ce programme linéaire est sous forme standard par rapport à la base $J$ car $A_J$ est la matrice identité et $c_J = 0$.
4. MAIS cette base n'est pas réalisable, puisque $\overline{x}_3 = -2$ est négative.
5. On a donc besoin de l'Etape 1.

# EXO 8.7.

## Solution

1. A cause de la première ligne il faut ajouter une nouvelle variable $y_1$ qui est non-négative et on veut la minimizer.

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 & & & & & + 1y_1 & = 2 \\ 1x_1 + 3x_2 & & + 1x_4 & & & & = 3 \\ & x_2 & & & + 1x_5 & & = 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & \geq 0 \\ & & & & & 1y_1 & = w(\min) \end{array}$$

2. Maintenant la base $J' = \{6,\ 4,\ 5\}$ est réalisable mais $c'_{J'} \neq 0$.
3. Comme $y_1 = 2 - (2x_1 + 1x_2 - x_3)$ il faut en fait résoudre $(P^*)$ :

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 & & & & & + 1y_1 & = 2 \\ 1x_1 + 3x_2 & & + 1x_4 & & & & = 3 \\ & x_2 & & & + 1x_5 & & = 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & \geq 0 \\ 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 & & & & & & = z'(\max) + 2 \end{array}$$

# EXO 8.7.

## Solution

1. Maintenant on peut utiliser l'Etape 2 pour résoudre $(P^*)$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 2 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 2 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | -1/2 | 0 | 0 | 1/2 | 1 |
| 0 | 5/2 | 1/2 | 1 | 0 | -1/2 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |

2. Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive donc la base $J'' := \{1,\ 4,\ 5\}$ est optimale et la valeur de la fonction objectif pour la solution de base associée est 0.
3. $J'' = \{1,\ 4,\ 5\}$ est donc une base réalisable de $(P_2)$.

# EXO 8.7.

## Solution

1. En utilisant le dernier tableau et la fonction objectif original, on a un programme linéaire $(P_2')$ qui est équivalent à $(P_2)$ et pour qui on a $A''_{J''} = I$.

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & + \frac{1}{2}x_2 & - \frac{1}{2}x_3 & & & = 1 \\ & + \frac{5}{2}x_2 & \frac{1}{2}x_3 & + x_4 & & = 2 \\ & 1x_2 & & & + x_5 & = 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq 0 \\ 3x_1 & - 1x_2 & & & & = z(\max) \end{array}$$

2. Il faut encore changer la fonction objectif car $c_{J''} \neq 0$ ($c_1 \neq 0$).
3. Il faut soustraire 3 fois la première ligne de la fonction objectif.

# EXO 8.7.

## Solution

1. On a le PL sous forme standard par rapport à $J''$.

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 & & & & & = 1 \\ + \frac{5}{2}x_2 & \frac{1}{2}x_3 + x_4 & & & & = 2 \\ 1x_2 & & & + x_5 & & = 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq 0 \\ - \frac{5}{2}x_2 & \frac{3}{2}x_3 & & & & = z(\max) - 3 \end{array}$$

2. Maintenant on peut utiliser l'Etape 2.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/2 | -1/2 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 5/2 | 1/2 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | -5/2 | 3/2 | 0 | 0 | -3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| 0 | 5 | 1 | 2 | 0 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | -10 | 0 | -3 | 0 | -9 |

3. Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive une solution optimale est donc $(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2) = (3,\ 0)$ de valeur 9.