Recherche Opérationnelle 1A
Programmation Linéaire
Résolution d'un Programme Linéaire

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Exo 8.1.

Énoncé

On considère le programme linéaire:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 &= 2 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= w(\min) \end{aligned}$$

On pose $J = \{1,\ 2\}$.

(a) Montrer que J est une base réalisable.

(b) Montrer que la solution de base est optimale.

Exo 8.1.

Solution

Exo 8.1.

Solution

(a) 1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base :

Exo 8.1.

Solution

(a) 1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) =$

Exo 8.1.

Solution

(a) 1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exo 8.1.

Solution

(a) 1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$

Exo 8.1.

Solution

(a) 1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$

Exo 8.1.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$

2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable :

Exo 8.1.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$
2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable : $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} =$

Exo 8.1.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$
2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable : $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exo 8.1.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$
2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable : $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$

Exo 8.1.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$
2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable : $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$
3. $w = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4.$

Exo 8.1.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$
2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable : $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$
3. $w = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4.$

(b) En considérant x_3 comme constante, on obtient

Exo 8.1.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$
2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable : $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$
3. $w = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4.$

(b) En considérant x_3 comme constante, on obtient $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $w(\min)$

Exo 8.1.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$
2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable : $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$
3. $w = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4.$

(b) En considérant x_3 comme constante, on obtient $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et

$w(\min) = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3$

Exo 8.1.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$
2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable : $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$
3. $w = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4.$

(b) En considérant x_3 comme constante, on obtient $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et

$w(\min) = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4 + 7x_3$

Exo 8.1.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$
2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable : $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$
3. $w = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4.$

(b) En considérant x_3 comme constante, on obtient $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et

$w(\min) = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4 + 7x_3 \geq 4,$

Exo 8.1.

Solution

(a)

1. $J = \{1,\ 2\}$ est une base : $det(A^J) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$
2. $J = \{1,\ 2\}$ est réalisable : $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$
3. $w = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4.$

(b) En considérant x_3 comme constante, on obtient $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et

$w(\min) = 2\overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + 4\overline{x}_3 = 4 + 7x_3 \geq 4$, donc

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution réalisable optimale.

Solution d'un PL : Méthode graphique

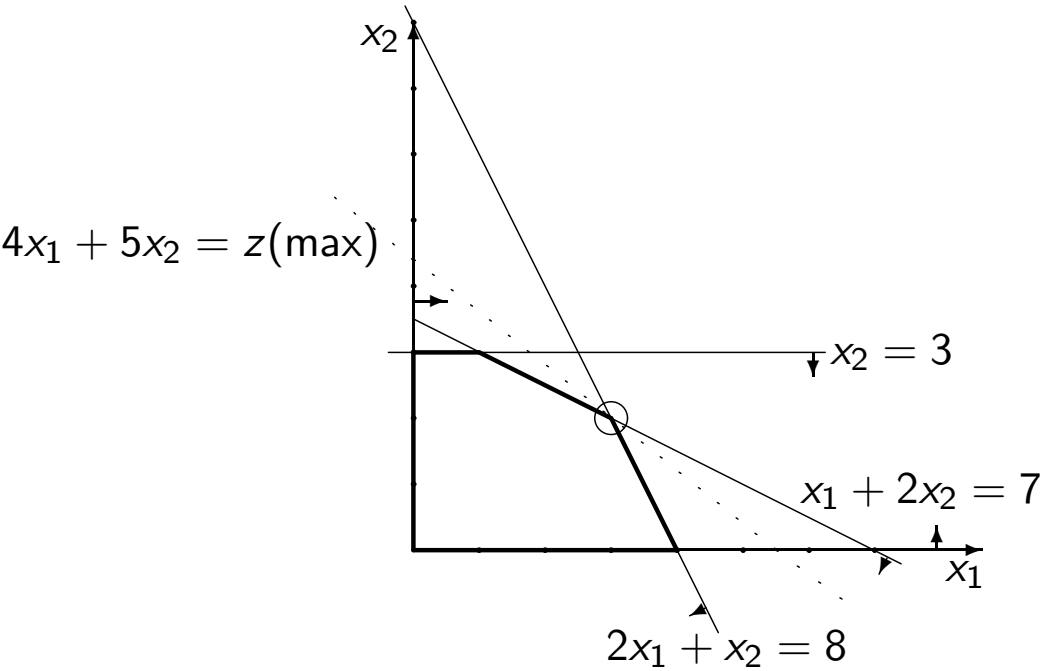
Exemple

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\
1x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0 \\
4x_1 + 5x_2 &= z(\max)
\end{aligned}
$$

Solution d'un PL : Méthode graphique

Exemple

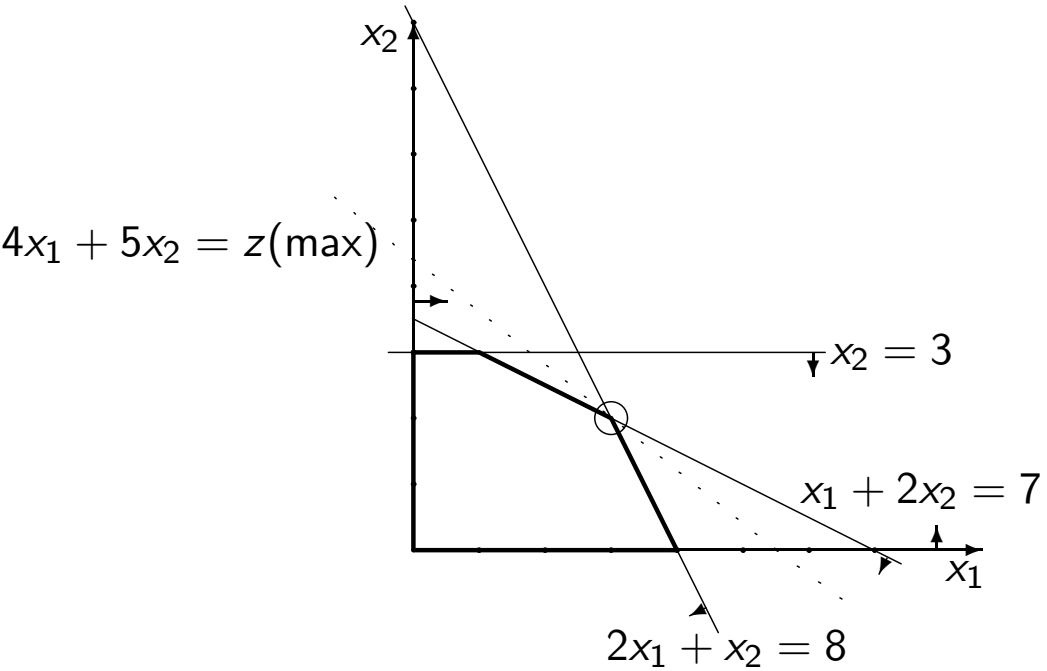
$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\
1x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0 \\
4x_1 + 5x_2 &= z(\max)
\end{aligned}
$$



Solution d'un PL : Méthode graphique

Exemple

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\
1x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0 \\
4x_1 + 5x_2 &= z(\max)
\end{aligned}
$$

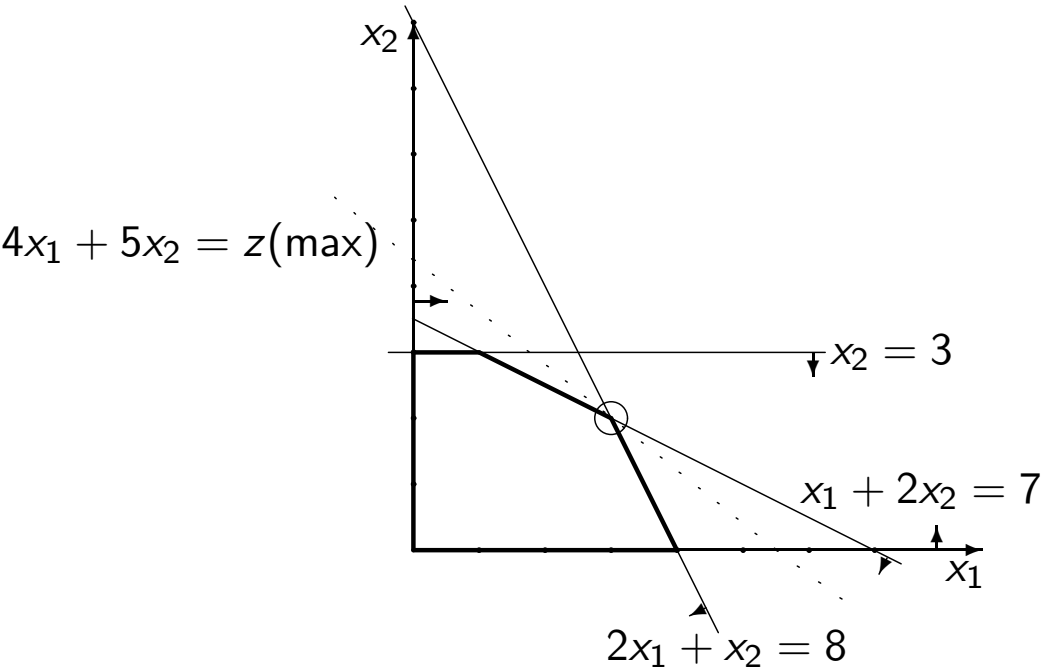


Solution Optimale

Solution d'un PL : Méthode graphique

Exemple

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\
1x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0 \\
4x_1 + 5x_2 &= z(\max)
\end{aligned}
$$



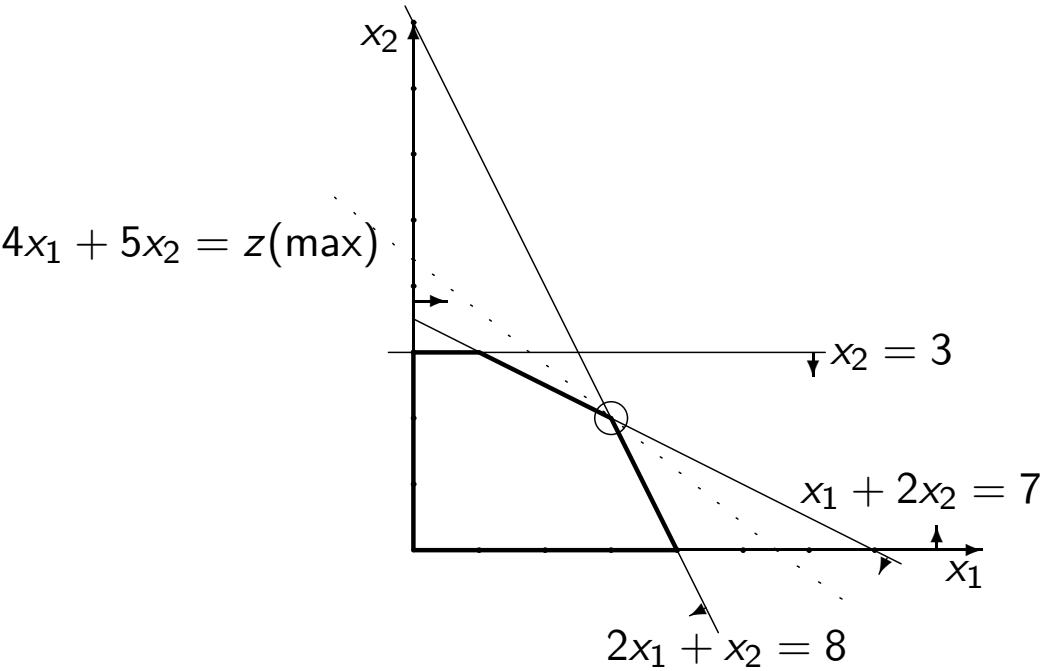
Solution Optimale

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &= 8 \\
1x_1 + 2x_2 &= 7
\end{aligned}
$$

Solution d'un PL : Méthode graphique

Exemple

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\
1x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0 \\
4x_1 + 5x_2 &= z(\max)
\end{aligned}
$$



Solution Optimale

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &= 8 \\
1x_1 + 2x_2 &= 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

Itération du simplexe

ENTRÉE : Un PL sous forme standard par rapport à une base réalisable J.

$$\begin{aligned} I \cdot x_J + A_{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} &= b \\ x_J, \qquad\quad x_{\overline{J}} &\geq 0 \\ c_{\overline{J}}^T \cdot x_{\overline{J}} &= z(\max) \end{aligned}$$

Itération du simplexe

ENTRÉE : Un PL sous forme standard par rapport à une base réalisable J.

$$\begin{aligned} I \cdot x_J + A_{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} &= b \\ x_J, \qquad\quad x_{\overline{J}} &\geq 0 \\ c_{\overline{J}}^T \cdot x_{\overline{J}} &= z(\max) \end{aligned}$$

SORTIE : Une et une seule des trois possibilités suivantes:

- La solution de base $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution optimale.
- Il n'y a pas de solution optimale bornée.
- Une meilleure base réalisable.

Itération du simplexe

ENTRÉE : Un PL sous forme standard par rapport à une base réalisable J.

$$\begin{aligned} I \cdot x_J + A_{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} &= b \\ x_J, \qquad\quad x_{\overline{J}} &\geq 0 \\ c_{\overline{J}}^T \cdot x_{\overline{J}} &= z(\max) \end{aligned}$$

1. Soit $s \in \overline{J}$ pour lequel $c_s = \max\{c_i : i \in \overline{J}\}$.
2. Si $c_s \leq 0$ `arrêter`. (la solution de base est optimale.)
3. Si $A_i^s \leq 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq m$ `arrêter`. ($z(\max) = \infty$.)
4. Sinon soit r tel que $\frac{b_r}{A_r^s} = \min\{\frac{b_i}{A_i^s} : 1 \leq i \leq m \text{ tel que } A_i^s > 0\}$.
5. Pivoter à A_r^s et `arrêter` avec la nouvelle base $J' = J + s - r$.
   - $(a'_r, b'_r) = (a_r, b_r)/A_r^s$,
   - $(a'_i, b'_i) = (a_i, b_i) - (a'_r, b'_r)A_i^s, \quad$ pour tout $i \neq r$,
   - $(c'^T, -z'_0) = (c^T, -z_0) - (a'_r, b'_r)c_s$.

EXO. 8.2.

Énoncé

- Une assurance traite deux types de dossier :
  - **A** - des sinistres, qu'on considère comme *deux* fois plus importants que
  - **B** - les garanties décennales.
- Chaque demande doit passer par trois sections **I**, **II** et **III** qui disposent de **80**, **80**, **120** heures par semaine respectivement.
- Les dossiers de type A demandent **5**, **8** et **12** heures de traitement dans les sections respectivement et
- les dossiers de type B : **8**, **4**, **4** heures de traitement.

(a) Mettre sous la forme d'un programme linéaire le problème de la maximisation du nombre de dossiers traités. Comment tenir compte de la différence d'importance entre les dossiers ?

(b) Résoudre par la méthode graphique. Résoudre par la méthode du simplexe. Si l'on peut employer une autre personne supplémentaire, dans quelle section son travail sera-t-il le plus avantageux ?

EXO. 8.2.

Solution (a)

EXO. 8.2.

Solution (a)

1. Tableau de données :

Dossier	A	B	temps disponible
I	**5**	**8**	**80**
II	**8**	**4**	**80**
III	**12**	**4**	**120**
Importance	**2**	**1**	

EXO. 8.2.

Solution (a)

1. Tableau de données :

Dossier	A	B	temps disponible
I	**5**	**8**	**80**
II	**8**	**4**	**80**
III	**12**	**4**	**120**
Importance	**2**	**1**	

2. Il s'agit d'un problème de production, le PL est donc :

EXO. 8.2.

Solution (a)

1. Tableau de données :

Dossier	A	B	temps disponible
I	**5**	**8**	**80**
II	**8**	**4**	**80**
III	**12**	**4**	**120**
Importance	**2**	**1**	

2. Il s'agit d'un problème de production, le PL est donc :

$$
\begin{aligned}
5a + 8b &\leq 80 \\
8a + 4b &\leq 80 \\
12a + 4b &\leq 120 \\
a, \quad b &\geq 0 \\
2a + 1b &= z(\max) - 0
\end{aligned}
$$

EXO. 8.2.

Solution (a)

1. Tableau de données :

Dossier	A	B	temps disponible
I	**5**	**8**	**80**
II	**8**	**4**	**80**
III	**12**	**4**	**120**
Importance	**2**	**1**	

2. Il s'agit d'un problème de production, le PL est donc :

$$\begin{aligned} 5a + 8b &\leq 80 \\ 8a + 4b &\leq 80 \\ 12a + 4b &\leq 120 \\ a, \quad b &\geq 0 \\ 2a + 1b &= z(\max) - 0 \end{aligned}$$

Dans la fonction objectif le coefficient de a est 2 car les dossiers de type A sont deux fois plus importants.

EXO. 8.2.

Solution (b)

La forme standard du PL est la suivante :

EXO. 8.2.

Solution (b)

La forme standard du PL est la suivante :

$$
\begin{array}{rrrrrl}
5a & +8b & +1c & & & = 80 \\
8a & +4b & & +1d & & = 80 \\
12a & +4b & & & +1e & = 120 \\
a, & b, & c, & d, & e & \geq 0 \\
2a & +1b & & & & = z(\max) - 0
\end{array}
$$

EXO. 8.2.

Solution (b)

La forme standard du PL est la suivante :

$$\begin{array}{rrrrrl} 5a & +8b & +1c & & & = 80 \\ 8a & +4b & & +1d & & = 80 \\ 12a & +4b & & & +1e & = 120 \\ a, & b, & c, & d, & e & \geq 0 \\ 2a & +1b & & & & = z(\max) - 0 \end{array}$$

Forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{3, 4, 5\}$.

EXO. 8.2.

Solution (b)

La forme standard du PL est la suivante :

$$\begin{aligned}
5a + 8b + 1c &= 80 \\
8a + 4b + 1d &= 80 \\
12a + 4b + 1e &= 120 \\
a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e &\geq 0 \\
2a + 1b &= z(\max) - 0
\end{aligned}$$

Forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{3, 4, 5\}$.

5	8	1	0	0	80
8	4	0	1	0	80
12	4	0	0	1	120
2	1	0	0	0	0

EXO. 8.2.

Solution (b)

La forme standard du PL est la suivante :

$$\begin{aligned}
5a + 8b + 1c &= 80 \\
8a + 4b + 1d &= 80 \\
12a + 4b + 1e &= 120 \\
a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e &\geq 0 \\
2a + 1b &= z(\max) - 0
\end{aligned}$$

Forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{3, 4, 5\}$.

5	8	1	0	0	80
8	4	0	1	0	80
12	4	0	0	1	120
2	1	0	0	0	0

0	$\frac{11}{2}$	1	$-\frac{5}{8}$	0	30
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	0	10
0	-2	0	$-\frac{3}{2}$	1	0
0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	-20

EXO. 8.2.

Solution (b)

La forme standard du PL est la suivante :

$$\begin{aligned}
5a + 8b + 1c &= 80 \\
8a + 4b + 1d &= 80 \\
12a + 4b + 1e &= 120 \\
a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e &\geq 0 \\
2a + 1b &= z(\max) - 0
\end{aligned}$$

Forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{3, 4, 5\}$.

5	8	1	0	0	80
8	4	0	1	0	80
12	4	0	0	1	120
2	1	0	0	0	0

0	$\frac{11}{2}$	1	$-\frac{5}{8}$	0	30
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	0	10
0	-2	0	$-\frac{3}{2}$	1	0
0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	-20

La solution optimale du PL initial est

EXO. 8.2.

Solution (b)

La forme standard du PL est la suivante :

$$\begin{aligned} 5a + 8b + 1c &= 80 \\ 8a + 4b + 1d &= 80 \\ 12a + 4b + 1e &= 120 \\ a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e &\geq 0 \\ 2a + 1b &= z(\max) - 0 \end{aligned}$$

Forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{3, 4, 5\}$.

5	8	1	0	0	80
8	4	0	1	0	80
12	4	0	0	1	120
2	1	0	0	0	0

0	$\frac{11}{2}$	1	$-\frac{5}{8}$	0	30
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	0	10
0	-2	0	$-\frac{3}{2}$	1	0
0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	-20

La solution optimale du PL initial est $(\overline{a}, \overline{b}) = (10, 0)$.

EXO. 8.4.

Énoncé

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} -2x_1 + 5x_2 &\leq 10 \\ -1x_1 + 1x_2 &\leq 1 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \\ 1x_1 + 2x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

(a) Utiliser la méthode graphique pour chercher une solution optimale du programme linéaire.

(b) Ensuite appliquer formellement la méthode du simplexe pour le résoudre.

EXO. 8.4.

Solution (b)

La forme standard du PL est :

$$\begin{array}{rrrrl} -2x_1 & +5x_2 & +1x_3 & & = 10 \\ -1x_1 & +1x_2 & & +1x_4 & = 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \\ 1x_1 & +2x_2 & & & = z(\max) \end{array}$$

EXO. 8.4.

Solution (b)

La forme standard du PL est :

$$\begin{array}{rrrrl} -2x_1 & +5x_2 & +1x_3 & & = 10 \\ -1x_1 & +1x_2 & & +1x_4 & = 1 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \\ 1x_1 & +2x_2 & & & = z(\max) \end{array}$$

Forme standard par rapport à la base réalisable $J = \{3, 4\}$.

EXO. 8.4.

Solution (b)

-2	5	1	0	10
-1	1	0	1	1
1	2	0	0	0

EXO. 8.4.

Solution (b)

-2	5	1	0	10
-1	**1**	0	1	1
1	2	0	0	0

3	0	1	-5	5
-1	1	0	1	1
3	0	0	-2	-2

EXO. 8.4.

Solution (b)

-2	5	1	0	10
-1	**1**	0	1	1
1	2	0	0	0

3	0	1	-5	5
-1	1	0	1	1
3	0	0	-2	-2

1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
0	0	-1	3	-7

EXO. 8.4.

Solution (b)

-2	5	1	0	10
-1	**1**	0	1	1
1	2	0	0	0

3	0	1	-5	5
-1	1	0	1	1
3	0	0	-2	-2

1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
0	0	-1	3	-7

On s'arrête avec $c_4 = 3 > 0$ et $a^4 \leq 0$,

EXO. 8.4.

Solution (b)

-2	5	1	0	10
-1	[1]	0	1	1
1	2	0	0	0

[3]	0	1	-5	5
-1	1	0	1	1
3	0	0	-2	-2

1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
0	0	-1	3	-7

On s'arrête avec $c_4 = 3 > 0$ et $a^4 \leq 0$, il n'existe donc pas de solution optimale bornée.