Recherche Opérationnelle 1A
Théorie des graphes
Plus courts chemins

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

EXO 5.1

Énoncé

- Dans un réseau soient P un plus court (s, p)-chemin et $x, y \in V(P)$.
- Alors le sous-chemin $P[x, y]$ est un plus court (x, y)-chemin.

EXO 5.1

Énoncé

- Dans un réseau soient P un plus court (s,p)-chemin et $x, y \in V(P)$.
- Alors le sous-chemin $P[x,y]$ est un plus court (x,y)-chemin.

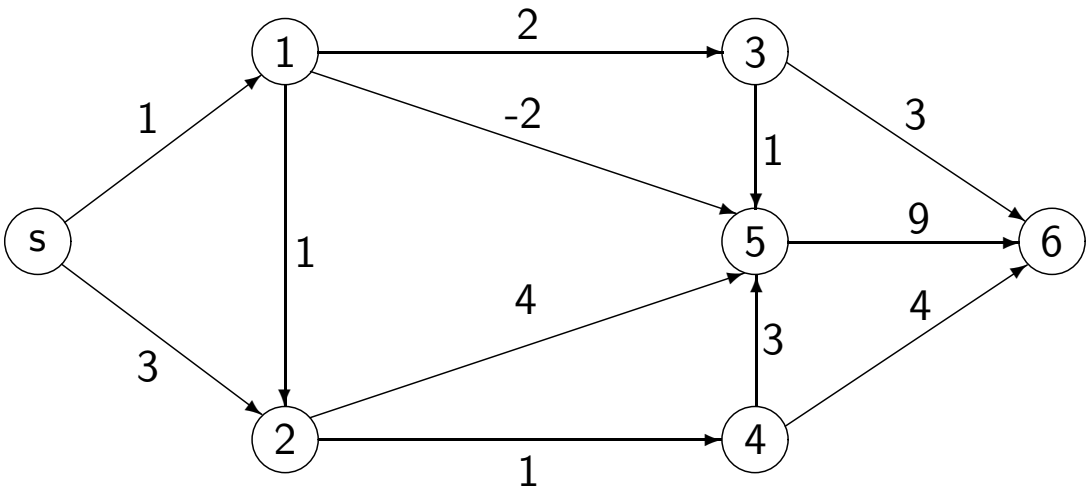
Solution

1. Soit Q un plus court (x,y)-chemin, donc $c(Q) \leq c(P[x,y])$.
2. $R := P[s,x] + Q + P[y,p]$ est un (s,p)-chemin.
3. Puisque P est un plus court (s,p)-chemin,
   $c(P) \leq c(R) = c(P) - c(P[x,y]) + c(Q)$ d'où $c(P[x,y]) \leq c(Q)$.
4. Donc $c(P[x,y]) = c(Q)$,
5. c'est-à-dire $P[x,y]$ est un plus court (x,y)-chemin.

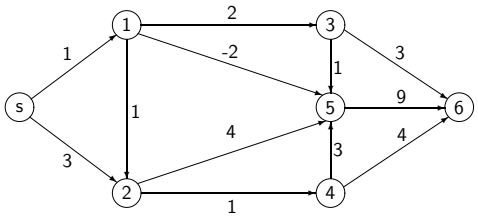
EXO 5.2

Énoncé

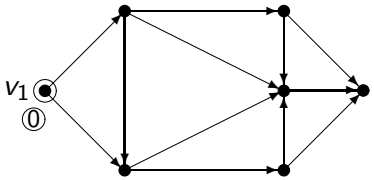
Donner (a) **les plus courts** chemins issus du sommet s, et puis (b) **les plus longs** chemins, dans le réseau suivant.

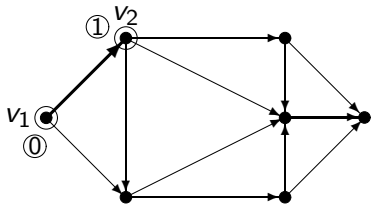


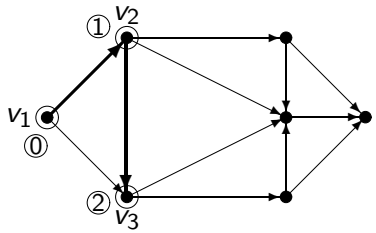
EXO 5.2(a)



$\ell(v_2) = \min\{0 + 1\} = 1$

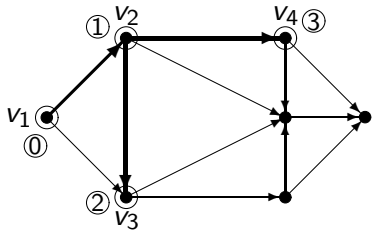


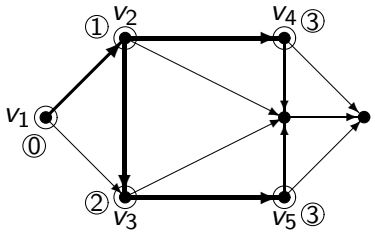


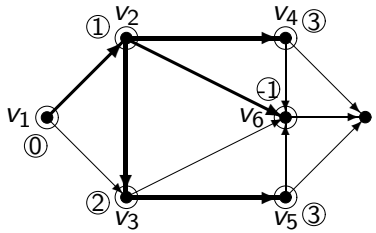


$\ell(v_3) = \min\{1 + 1, 0 + 3\} = 2$

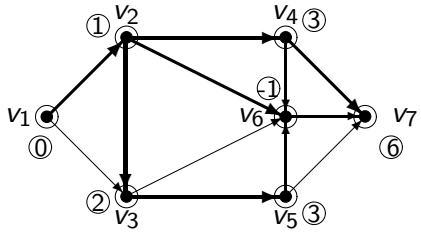
$\ell(v_4) = \min\{1 + 2\} = 3$





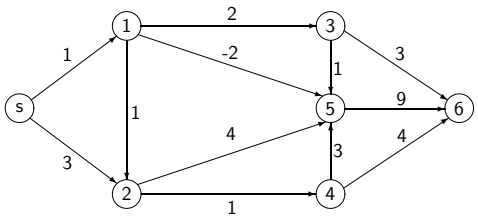


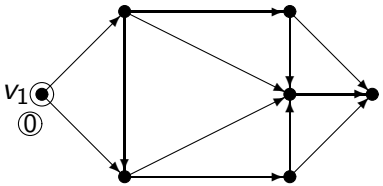
$\ell(v_5) = \min\{2 + 1\} = 3$ $\ell(v_6) = \min\{3 + 3, 2 + 4,$
$1 - 2, 3 + 1\} = -1$



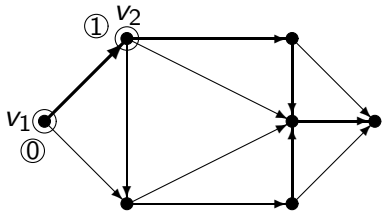
$\ell(v_7) = \min\{3 + 3, -1 + 9, 3 + 4\} = 6$

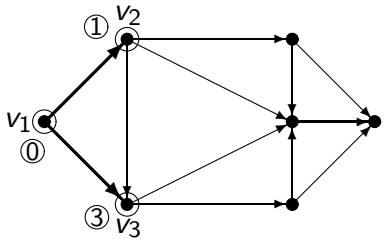
EXO 5.2(b)





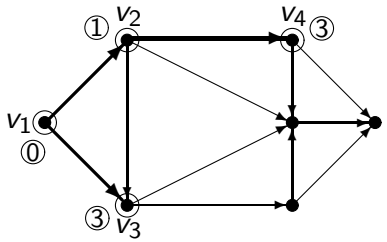
$\ell(v_2) = \max\{0+1\} = 1$

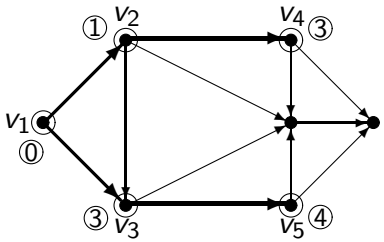




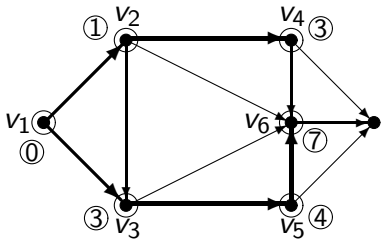
$\ell(v_3) = \max\{1+1, 0+3\} = 3$

$\ell(v_2) = \max\{1+2\} = 3$

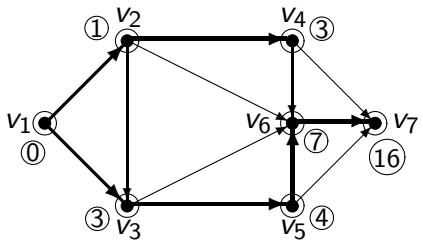




$\ell(v_5) = \max\{3+1\} = 4$



$\ell(v_6) = \max\{3+1, 1-2,$
$3+4, 4+3\} = 7$

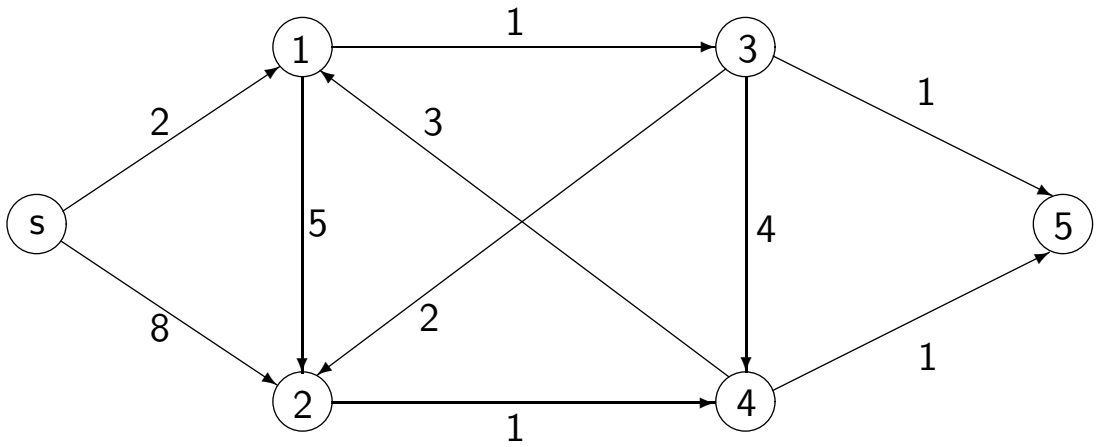


$\ell(v_7) = \max\{3+3, 7+9, 4+4\} = 16$

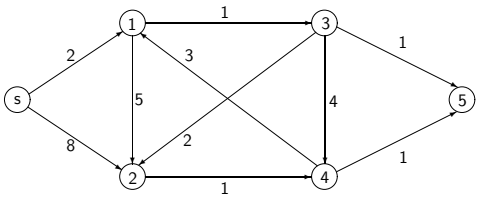
EXO 5.3

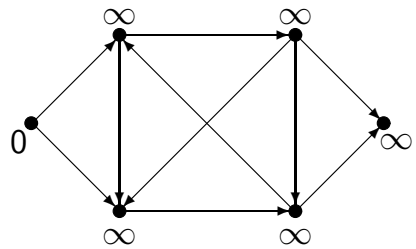
Énoncé

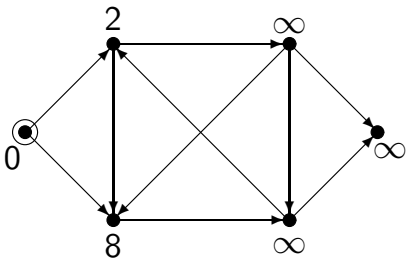
En appliquant l'algorithme de Dijkstra, donner les plus courts chemins issus du sommet s, dans le réseau suivant.

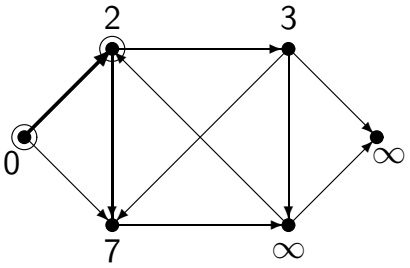


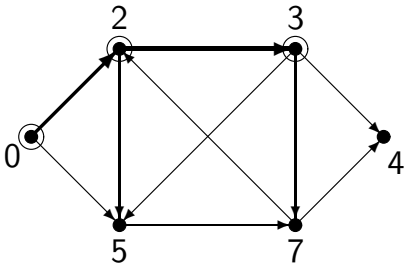
EXO 5.3

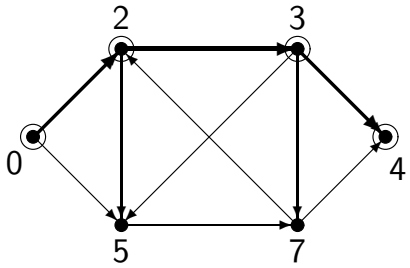


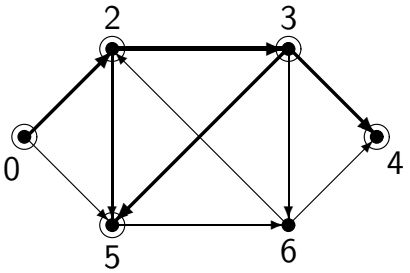


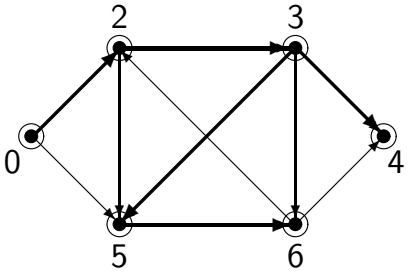












EXO 5.4

Énoncé

Donner un réseau sans circuit absorbant avec une racine s pour lequel l'algorithme de Dijkstra ne trouve pas les chemins de coût minimum issus de s.

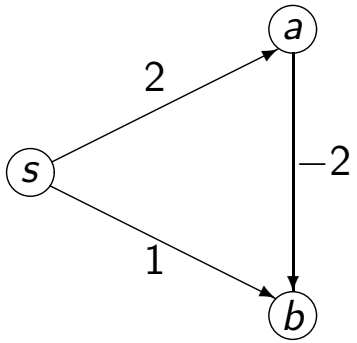
EXO 5.4

Énoncé

Donner un réseau sans circuit absorbant avec une racine s pour lequel l'algorithme de Dijkstra ne trouve pas les chemins de coût minimum issus de s.

Solution

Soit (G, c) le réseau ci-dessous. Alors l'algorithme de Dijkstra trouve le chemin sb pour b mais le chemin sab est plus court.



EXO 5.5

Énoncé

- Soit (G, c) un réseau sans circuit absorbant et soit s une racine de G.
- Soit $w_k(v)$ le coût minimum d'un (s, v)-chemin de longueur $\leq k$.

Montrer que

(a) $w_{k+1}(v) \leq w_k(v)$ pour chaque sommet v.

(b) $w_{k+1}(v) \leq c(uv) + w_k(u)$ pour chaque $uv \in A(G)$.

(c) $w_{k+1}(v) = \min\{w_k(v), c(uv) + w_k(u) : uv \in A(G)\}$.

(d) $w_n(v) = w_{n-1}(v)$ pour chaque sommet v où $n = |V(G)|$.

EXO 5.5

Solution

- Soit $\mathcal{W}_k(v)$ l'ensemble de chemins de s à v de longueur $\leq k$.
- Alors $w_k(v) = \min\{c(P) : P \in \mathcal{W}_k(v)\}$.

(a) Soit $v \in V(G)$. Si $P \in \mathcal{W}_k(v)$ tel que $c(P) = w_k(v)$ alors $P \in \mathcal{W}_{k+1}(v)$ donc $w_{k+1}(v) \leq c(P) = w_k(v)$.

(b) Soit $uv \in A(G)$. Si $P \in \mathcal{W}_k(u)$ tel que $c(P) = w_k(u)$ alors $P + uv \in \mathcal{W}_{k+1}(v)$ donc $w_{k+1}(v) \leq c(P + uv) = c(P) + c(uv) = w_k(u) + c(uv)$.

EXO 5.5

Solution de (c)

1. Par (a) et (b), $w_{k+1}(v) \leq \min\{w_k(v), c(uv) + w_k(u) : uv \in A(G)\}$.
   1. Soit $P \in \mathcal{W}_{k+1}(v)$ tel que $c(P) = w_{k+1}(v)$.
   2. Si $P \in \mathcal{W}_k(v)$ alors $w_k(v) \leq c(P) = w_{k+1}(v)$.
   3. Sinon P est de longueur $k+1 \geq 1$.
   4. Soient uv le dernier arc de P et $P' := P[s,u]$.
   5. P' est un (s,u)-chemin de longueur k c'est-à-dire $P' \in \mathcal{W}_k(u)$.
   6. Alors $w_k(u) \leq c(P') = c(P) - c(uv) = w_{k+1}(v) - c(uv)$.
   7. D'où $w_k(u) + c(uv) \leq w_{k+1}(v)$.
2. Donc $w_{k+1}(v) \geq \min\{w_k(v), c(uv) + w_k(u) : uv \in A(G)\}$.
3. Les inégalités (1) et (2) impliquent (c).

EXO 5.5

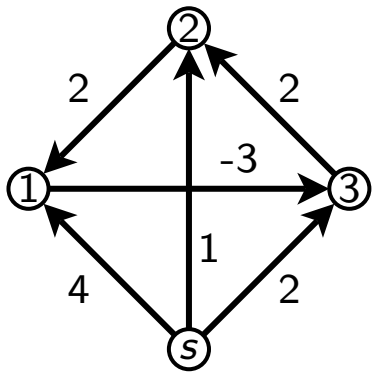
Solution de (d)

1. Soit $P \in \mathcal{W}_n(v)$ tel que $c(P) = w_n(v)$ et tel que $|A(P)|$ soit minimum.
2. Alors P est un chemin élémentaire.
   1. Sinon il existe un sommet $x \in V(G)$ qui est utilisé plusieurs fois par P tel qu'aucun sommet de $P[x, x]$ n'est utilisé plusieurs fois par $P[x, x]$.
   2. En enlevant de P le sous-chemin $P[x, x]$ (qui est un circuit C tel que $c(C) \geq 0$ et $|A(C)| > 0$) on obtient un (s, v)-chemin P' tel que
   3. $c(P) \leq c(P') = c(P) - c(C) \leq c(P)$,
   4. donc $c(P') = c(P)$ et que $|A(P')| < |A(P)|$ (contradiction).
3. Donc $|A(P)| \leq n - 1$ c'est-à-dire $P \in \mathcal{W}_{n-1}(v)$,
4. d'où $w_{n-1}(v) \leq c(P) = w_n(v)$.
5. D'après (a) $w_n(v) \leq w_{n-1}(v)$ donc on a $w_n(v) = w_{n-1}(v)$.

EXO 5.6

Énoncé

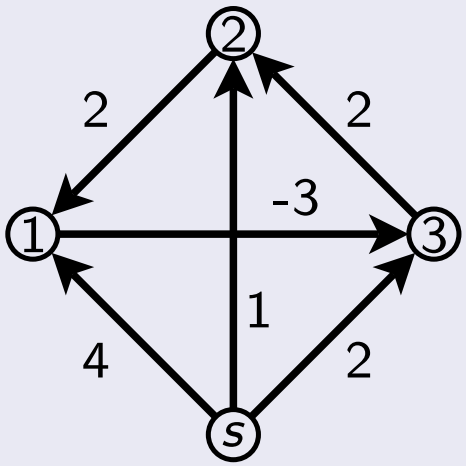
Trouver les distances du sommets s aux autres sommets dans le réseau suivant en utilisant l'algorithme de Bellman-Ford (l'Exercice 5.5).



EXO 5.6

Solution

$w_{k+1}(v) = \min\{w_k(v), c(uv) + w_k(u) : uv \in A(G)\}$.

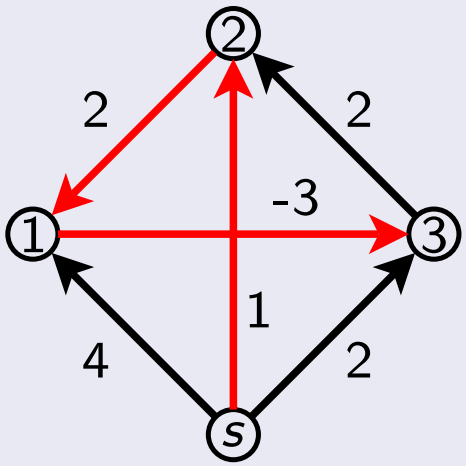


	0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
1	∞	4	3	3	3
2	∞	1	1	1	1
3	∞	2	1	0	0

EXO 5.6

Solution

$w_{k+1}(v) = \min\{w_k(v), c(uv) + w_k(u) : uv \in A(G)\}$.



	0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
1	∞	4	3	3	3
2	∞	1	1	1	1
3	∞	2	1	0	0