Recherche Opérationnelle 1A
Programmation Linéaire
Étape 1 de l'algorithme du simplexe

Zoltán Szigeti

Laboratoire G-SCOP
INP Grenoble, France

Rappel de l'algorithme du simplexe Etape 2

Etape 2 du simplexe

1. Soit $s \in \overline{J}$ pour lequel $c_s = \max\{c_i : i \in \overline{J}\}$.
2. Si $c_s \leq 0$ `arrêter`. (la solution de base est optimale.)
3. Si $a^s \leq 0$ `arrêter`. ($z(\max) = \infty$.)
4. Sinon soit r tel que $\frac{b_r}{A^s_r} = \min\{\frac{b_i}{A^s_i} : 1 \leq i \leq m \text{ tel que } A^s_i > 0\}$.
5. Pivoter à A^s_r et `recommencer` avec la nouvelle base réalisable $J' = J + s - r$.

Pivot

- $(a'_r, b'_r) = (a_r, b_r)/A^s_r$,
- $(a'_i, b'_i) = (a_i, b_i) - (a'_r, b'_r)A^s_i$, pour tout $i \neq r$,
- $(c'^T, -z'_0) = (c^T, -z_0) - (a'_r, b'_r)c_s$.

Justification de l'algorithme du simplexe Etape 2

Théorème

Si $c_s \leq 0$ alors J est une base optimale.

Démonstration

1. $z(\max) = z_0 + 0 \cdot x_J + c_{\overline{J}}^T \cdot x_{\overline{J}} \leq z_0$, puisque $c_{\overline{J}}^T \leq 0$ et $x_{\overline{J}} \geq 0$.
2. Pour $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix}$, la solution de base associée à J, $z = z_0$,
3. donc elle est optimale.

Justification de l'algorithme du simplexe Etape 2

Théorème

Si $c_s > 0$ et $a^s \leq 0$ alors $z(\max) = \infty$.

Démonstration

1. On augmente x_s en gardant les autres variables hors base fixées à 0, soient donc $\overline{x}'_s = t > 0$, $\overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} = 0$.
2. $\begin{pmatrix} \overline{x}'_J \\ \overline{x}'_s \\ \overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a^s \cdot t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution réalisable pour tout $t > 0$
   - $A \cdot \overline{x}' = I \cdot \overline{x}'_J + a^s \cdot \overline{x}'_s + A^{\overline{J}\setminus\{s\}} \cdot \overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} = (b - a^s \cdot t) + a^s \cdot t + 0 = b$,
   - $\overline{x}'_J = b - a^s \cdot t \geq b \geq 0$, puisque $a^s \leq 0, t > 0$ et $b \geq 0$.
3. $z(\max) = \infty$: $z' - z_0 = c_J^T \cdot \overline{x}'_J + c_s \cdot \overline{x}'_s + c^T_{\overline{J}\setminus\{s\}} \cdot \overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} = 0 \cdot \overline{x}'_J + c_s \cdot t + c^T_{\overline{J}\setminus\{s\}} \cdot 0 = c_s \cdot t$ tend vers ∞ si t tend vers ∞.

Justification de l'algorithme du simplexe Etape 2

Théorème

Nouvelle base J' est réalisable.

Démonstration

$\overline{x}_{J'} = b'$.

1. $b'_r = \frac{b_r}{A^s_r} \geq 0$, puisque $b_r \geq 0$ et $A^s_r > 0$,
2. $b'_i = b_i - b'_r \cdot A^s_i$ si $i \neq r$.
   1. Si $A^s_i \leq 0$ alors $b'_i = b_i - b'_r \cdot A^s_i \geq b_i \geq 0$, car $b'_r \geq 0, A^s_i \leq 0$ et $b_i \geq 0$.
   2. Si $A^s_i > 0$ alors $b_i - b'_r \cdot A^s_i \geq 0$ si et seulement si $\frac{b_i}{A^s_i} \geq b'_r$, mais $\frac{b_i}{A^s_i} \geq \min\{\frac{b_j}{A^s_j} : 1 \leq j \leq m \text{ tel que } A^s_j > 0\} = \frac{b_r}{A^s_r} = b'_r$.

Justification de l'algorithme du simplexe Etape 2

Théorème

L'algorithme s'arrête.

Démonstration

1. Cas non-dégénéré : $b > 0$ toujours.
   1. La fonction objectif augmente toujours : $z'_0 = z_0 + b_{r'} \cdot c_s > z_0$, puisque $b_{r'}, c_s > 0$.
   2. les bases sont donc toutes différentes pendant l'exécution,
   3. et puisque le nombre de bases est fini, $\leq C_n^m$,
   4. l'algorithme s'arrête.
2. Cas dégénéré : $b_i = 0$ peut arriver.
   1. la même base peut revenir, le simplexe peut cycler.
   2. Pour l'éviter, on utilise la Règle de Brandt :
      Si on a le choix pour s ou r, il faut choisir le plus petit indice possible.

Etape 1 de l'algorithme du simplexe

Définition

On cherche une base réalisable du PL, où on suppose que $b \geq 0$:

$$(\text{P}) \qquad \begin{aligned} A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

On considère le PL auxiliaire suivant :

$$(\text{P'}) \qquad \begin{aligned} A \cdot x + I \cdot y &= b \\ x, \quad y &\geq 0 \\ (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x &= z'(\max) + \mathbf{1}^T \cdot b \end{aligned}$$

Théorème

Il existe une solution réalisable de (P) si et seulement si $z'(\max) = 0$.

Etape 1 de l'algorithme du simplexe

Théorème

Il existe une solution réalisable de (P) si et seulement si $z'(\max) = 0$.

Démonstration

1. $z'(\max) = (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x - \mathbf{1}^T \cdot b = \mathbf{1}^T \cdot (A \cdot x - b) = \mathbf{1}^T \cdot (-I \cdot y)$ $= -\mathbf{1}^T \cdot y$.
2. $z'(\max) = 0$ si et seulement si
   - il existe $\overline{x}, \overline{y}$ tels que $A \cdot \overline{x} + I \cdot \overline{y} = b$, $\overline{x}, \overline{y} \geq 0$, et $-\mathbf{1}^T \cdot \overline{y} = 0$ mais $-\mathbf{1}^T \cdot \overline{y} = 0$ si et seulement si $\overline{y} = 0$ puisque $\overline{y} \geq 0$,
   - il existe $\overline{x}$ tel que $A \cdot \overline{x} = b, \overline{x} \geq 0$, il existe une solution réalisable $\overline{x}$ de (P).

Etape 1 de l'algorithme du simplexe

Remarque

$$\text{(P')} \quad \begin{array}{rrl} A \cdot x + I \cdot y & = & b \\ x, \quad y & \geq & 0 \\ (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x & = & z'(\max) + \mathbf{1}^T \cdot b \end{array}$$

1. Les variables de y forment une base réalisable du (P'), puisque on a la matrice identité et $b \geq 0$,
2. (P') est sous forme standard par rapport à y.
3. On peut le résoudre avec l'Etape 2.

Exemple

Énoncé

Appliquer l'algorithme du simplexe pour résoudre le programme linéaire suivant.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\geq 2 \\ 1x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1 \quad x_2 &\geq 0 \\ 3x_1 - 1x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

Exemple

Solution

1. On ajoute les nouvelles variables $x_3,\ x_4,\ x_5$ qui sont non-négatives et on obtient le programme linéaire suivant P_2 :

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x_1 & + 1x_2 & \geq 2 & & -2x_1 & - 1x_2 & + 1x_3 & & = -2 \\ 1x_1 & + 3x_2 & \leq 3 & & 1x_1 & + 3x_2 & & + 1x_4 & = 3 \\ & x_2 & \leq 4 & & & x_2 & & + 1x_5 & = 4 \\ x_1 & x_2 & \geq 0 & & x_1 & x_2 & x_3 \quad x_4 & x_5 & \geq 0 \\ 3x_1 & - 1x_2 & = z(\max) & & 3x_1 & - 1x_2 & & & = z(\max) \end{array}$$

2. Soit $J := \{3,\ 4,\ 5\}$.
3. Alors ce programme linéaire est sous forme standard par rapport à la base J car A_J est la matrice identité et $c_J = 0$.
4. Mais cette base n'est pas réalisable, puisque $\overline{x}_3 = -2$ est négative.
5. On a donc besoin de l'Etape 1.

Exemple

Solution

1. A cause de la première ligne il faut ajouter une nouvelle variable y_1 qui est non-négative et on veut minimizer $y_1 \iff$ maximiser -y_1.

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 & & & & & + 1y_1 & = 2 \\ 1x_1 + 3x_2 & & + 1x_4 & & & & = 3 \\ & x_2 & & & + 1x_5 & & = 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & \geq 0 \\ & & & & & - 1y_1 & = z'(\max) \end{array}$$

2. Maintenant la base $J' = \{6,\ 4,\ 5\}$ est réalisable mais $c'_{J'} \neq 0$.

3. En ajoutant la première ligne, il faut en fait résoudre (P^*) :

$$\begin{array}{rrrrrrr} 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 & & & & & + 1y_1 & = 2 \\ 1x_1 + 3x_2 & & + 1x_4 & & & & = 3 \\ & x_2 & & & + 1x_5 & & = 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & \geq 0 \\ 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 & & & & & & = z'(\max) + 2 \end{array}$$

Exemple

Solution

1. Maintenant on peut utiliser l'Etape 2 pour résoudre (P^*).

2	1	-1	0	0	1	2
1	3	0	1	0	0	3
0	1	0	0	1	0	4
2	1	-1	0	0	0	2

1	1/2	-1/2	0	0	1/2	1
0	5/2	1/2	1	0	-1/2	2
0	1	0	0	1	0	4
0	0	0	0	0	-1	0

2. Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive, la base $J'' := \{1,\ 4,\ 5\}$ est donc optimale et la valeur de la fonction objectif pour la solution de base associée est 0.
3. J'' est donc une base réalisable de (P_2).

Exemple

Solution

1. En utilisant le dernier tableau et la fonction objectif originale on a un PL (P_2') qui est équivalent à (P_2) et pour qui on a $A''_{J''} = I$.

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 & & & & & = 1 \\ + \frac{5}{2}x_2 & \frac{1}{2}x_3 + x_4 & & & & = 2 \\ 1x_2 & & & + x_5 & & = 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq 0 \\ 3x_1 - 1x_2 & & & & & = z(\max) \end{array}$$

2. Il faut encore changer la fonction objectif car $c_{J''} \neq 0$ $(c_1 \neq 0)$.
3. Il faut soustraire 3 fois la première ligne de la fonction objectif.

Exemple

Solution

1. On a le PL sous forme standard par rapport à J''.

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 & & & & & = 1 \\ + \frac{5}{2}x_2 & \frac{1}{2}x_3 + x_4 & & & & = 2 \\ 1x_2 & & & + x_5 & & = 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq 0 \\ - \frac{5}{2}x_2 & \frac{3}{2}x_3 & & & & = z(\max) - 3 \end{array}$$

2. Maintenant on peut utiliser l'Etape 2.

1	1/2	-1/2	0	0	1
0	5/2	1/2	1	0	2
0	1	0	0	1	4
0	-5/2	3/2	0	0	-3

1	3	0	1	0	3
0	5	1	2	0	4
0	1	0	0	1	4
0	-10	0	-3	0	-9

3. Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive une solution optimale est donc $(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2) = (3,\ 0)$ de valeur 9.

Algorithme du simplexe révisé

Étant donnés un PL sous forme standard, une base réalisable J, et sa forme standard par rapport à J :

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \hat{A} \cdot x &= \hat{b} \\ x &\geq 0 \\ \hat{c}^T \cdot x &= z(\max) - \hat{z}_0 \end{aligned}$$

1. $\hat{A} = (A^J)^{-1} \cdot A$,
2. $\hat{b} = (A^J)^{-1} \cdot b$,
3. $\pi^T = c_J^T \cdot (A^J)^{-1}$,
4. $\hat{c}^T = c^T - c_J^T \cdot \hat{A} = c^T - c_J^T \cdot (A^J)^{-1} \cdot A = c^T - \pi^T \cdot A$,
5. $\hat{A}^s = (A^J)^{-1} \cdot A^s$,
6. $\hat{z}_0 = c^T \cdot \overline{x} = c_J^T \cdot \overline{x}_J = c_J^T \cdot \hat{b} = c_J^T \cdot (A^J)^{-1} \cdot b = \pi^T \cdot b$.

On peut calculer seulement ces vecteurs et pas tout le tableau.