Optimisation Combinatoire 2A
Flots de coût minimum 3

Zoltán Szigeti

Ensimag
Grenoble INP

Algorithme pour trouver un m-flot (f,g)-réalisable de c-coût minimum dans G

Algorithme

Entrée : (G, m, f, g, c) tel que $f \leq g$ et $m(V) = 0$.

Sortie : Soit un m-flot (f,g)-réalisable x de c-coût minimum dans G, soit $Z \subseteq V(G)$ tel que $d_g^+(Z) - d_f^-(Z) < m(Z)$.

Etape 1: Transformation 1: $(G, m, f, g, c) \Rightarrow (G_2, m_2, g_2, c_2)$.

Etape 2: Transformation 2: $(G_2, m_2, g_2, c_2) \Rightarrow (G_3, g_3, c_3, s, t)$.

Etape 3: Exécution de l'Algorithme Suppression des circuits absorbants dans (G_3, g_3, c_3, s, t).

Etape 4: S'il s'arrête avec une (s,t)-coupe $Z \cup s$ telle que $cap_{g_3}(Z \cup s) < cap_{g_3}(s)$ alors arrêter avec Z.

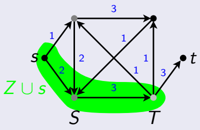
Etape 5: S'il s'arrête avec un (s,t)-flot g_3-réalisable x' de valeur $cap_{g_3}(s)$ de c_3-coût minimum, alors arrêter avec $x := x'_G + f$.

Quand on s'arrête à l'Etape 4, Z viole la condition

Lemme

Si $cap_{g_3}(Z \cup s) < cap_{g_3}(s)$ alors $d_g^+(Z) - d_f^-(Z) < m(Z)$.

Exemple

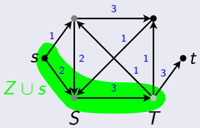


Quand on s'arrête à l'Etape 4, Z viole la condition

Lemme

Si $cap_{g_3}(Z \cup s) < cap_{g_3}(s)$ alors $d_g^+(Z) - d_f^-(Z) < m(Z)$.

Exemple



Démonstration

$$
\begin{aligned}
0 > {} & cap_{g_3}(Z \cup s) - cap_{g_3}(s) \\
= {} & -\sum_{v \in S \cap Z} g_3(sv) + \sum_{u \in T \cap Z} g_3(ut) + \sum_{uv \in \delta_G(Z)} g_3(uv) \\
= {} & -\sum_{v \in S \cap Z} m_2(v) - \sum_{u \in T \cap Z} m_2(u) + \sum_{uv \in \delta_G(Z)} (g-f)(uv) \\
= {} & -\, m_2(S \cap Z) \quad - m_2(T \cap Z) \quad + d^+_{g-f}(Z) \\
= {} & -\, m_2(S \cap Z) - m_2(T \cap Z) - m_2(Z \setminus (S \cup T)) + d^+_{g-f}(Z) \\
= {} & -\, m_2(Z) + d^+_{g-f}(Z) \\
= {} & -\, (m(Z) - (d_f^+(Z) - d_f^-(Z))) + (d_g^+(Z) - d_f^+(Z)) \\
= {} & d_g^+(Z) - d_f^-(Z) - m(Z).
\end{aligned}
$$

Flot entier

Théorème

Si les fonctions m, f, g sont entières et il existe un m-flot (f, g)-réalisable alors il en existe un de c-coût minimum entier.

Flot entier

Théorème

Si les fonctions m, f, g sont entières et il existe un m-flot (f, g)-réalisable alors il en existe un de c-coût minimum entier.

Démonstration

L'algorithme fournit automatiquement un tel flot :

1. $m^1 := m$, $f^1 := f$, et $g^1 := g$ sont entières.
2. Transformation 1 : m^2 et g^2 sont entières.
3. Transformation 2 : g^3 est entière.
4. Edmonds-Karp : flot x est entier.
5. Changement du flot : nouveau flot x^* est entier.
6. m-flot (f, g)-réalisable : $x^*_G + f$ est entier.

Application

Reconstruire le ventricule gauche du coeur à partir de radiographies

- Pour diagnostiquer une possible maladie de coeur d'un patient, on doit voir la forme 3-dimensionnelle du ventricule gauche du coeur.
- Évidemment, le problème se réduit à plusieurs problèmes 2-dimension.
- En prenant les rayons X, on ne peut pas avoir directement l'image 2-dimensionnelle ; on aura plutôt deux projections 1-dimensionnelles de la densité de la région sur les deux axes.
- Le problème revient donc à construire une matrice binaire dont la somme de chaque ligne et de chaque colonne est connue.
- On suppose que pour chaque pixel de l'image, on connait une probabilité p_{ij} que le pixel appartient à la région cherchée.
- Modéliser ce problème par un problème de flots de coût minimum.

Application

Reconstruire une matrice binaire

- Pour une matrice binaire A, la somme ℓ_i (respectivement c_j) de chaque ligne i (et de chaque colonne j) est connue.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \\
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} &
\end{array}
$$

Application

Reconstruire une matrice binaire

- Pour une matrice binaire A, la somme ℓ_i (respectivement c_j) de chaque ligne i (et de chaque colonne j) est connue.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} & \end{array}$$

Application

Reconstruire une matrice binaire

- Pour une matrice binaire A, la somme ℓ_i (respectivement c_j) de chaque ligne i (et de chaque colonne j) est connue.
- On connait aussi les probabilités p_{ij} que l'élément a_{ij} est égale à 1.
- Comment trouver une telle matrice la plus probable par un problème de flots de coût minimum ?

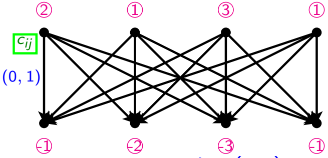
$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} & \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Application

$$\begin{array}{c c}
\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \\
\begin{array}{cccc} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 1 \end{array} &
\end{array}$$

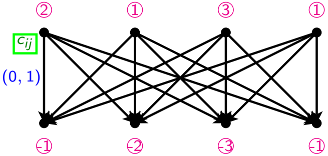
Application

$$\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \\
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} &
\end{array}$$



$$c_{ij} := -log(p_{ij})$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} & \end{array}$$



$$c_{ij} := -log(p_{ij})$$

max probabilité de la matrice choisie $\Longleftrightarrow$ $\max \prod_{x_{ij}=1} p_{ij} \Longleftrightarrow$ $\max log(\prod_{x_{ij}=1} p_{ij}) \Longleftrightarrow \max \sum_{x_{ij}=1} log(p_{ij}) \Longleftrightarrow \min \sum_{x_{ij}=1} -log(p_{ij})$ $\Longleftrightarrow \min \sum -log(p_{ij}) x_{ij} \Longleftrightarrow \min \sum c_{ij} x_{ij}$

Généralisation

Définition

1. Étant donnés
   1. un graphe orienté $G = (V, A)$,
   2. deux fonctions p et q sur chaque sommet v de G avec $p(v) \leq q(v)$,
   3. deux capacités f et g sur chaque arc e de G avec $f(e) \leq g(e)$,
   4. un coût c sur les arcs de G,
2. une fonction x sur les arcs est
   1. un (p, q)-flot si la la condition suivante est vérifiée :
      $p(v) \leq d_x^+(v) - d_x^-(v) \leq q(v) \quad \forall v \in V.$
   2. réalisable si la **contrainte de capacités** est vérifiée :
      $f(e) \leq x(e) \leq g(e) \quad \forall e \in A.$

Généralisation

Définition

1. Étant donnés
   1. un graphe orienté $G = (V, A)$,
   2. deux fonctions p et q sur chaque sommet v de G avec $p(v) \leq q(v)$,
   3. deux capacités f et g sur chaque arc e de G avec $f(e) \leq g(e)$,
   4. un coût c sur les arcs de G,
2. une fonction x sur les arcs est
   1. un (p, q)-flot si la la condition suivante est vérifiée :
      $p(v) \leq d_x^+(v) - d_x^-(v) \leq q(v) \quad \forall v \in V$.
   2. réalisable si la **contrainte de capacités** est vérifiée :
      $f(e) \leq x(e) \leq g(e) \quad \forall e \in A$.

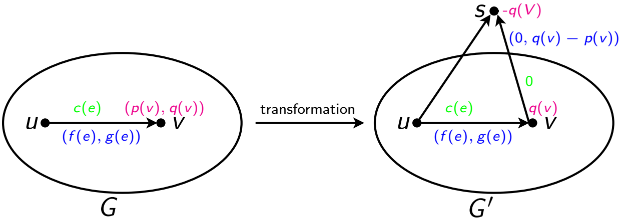
Remarque

Un problème de (p, q)-flot (f, g)-réalisable de c-coût minimum dans G se réduit à
un problème de m'-flot (f', g')-réalisable de c'-coût minimum dans G'.

Réduction

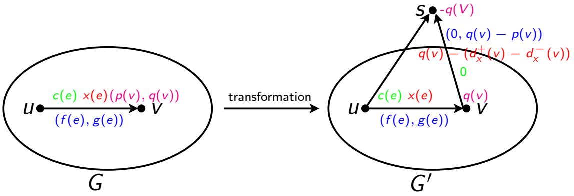
Construction: Etant donné (G, p, q, f, g, c), on définit

1. $$G' := (V \cup s, A \cup A') \text{ où } A' := \{vs : v \in V\},$$
2. $$m'(v) := \begin{cases} q(v) & \text{si } v \in V, \\ -q(V) & \text{si } v = s, \end{cases}$$
3. $$(f'(e), g'(e)) := \begin{cases} (f(e), g(e)) & \text{si } e \in A, \\ (0, q(v) - p(v)) & \text{si } e \in A', \end{cases}$$
4. $$c'(e) := \begin{cases} c(e) & \text{si } e \in A, \\ 0 & \text{si } e \in A'. \end{cases}$$



Exercice: Montrer que si

1. x est un (p,q)-flot (f,g)-réalisable dans G alors
   x' est un m'-flot (f',g')-réalisable dans G' où
   $$x'(e) := \begin{cases} x(e) & \text{si } e \in A, \\ q(v) - (d_x^+(v) - d_x^-(v)) & \text{si } e \in A'. \end{cases}$$
2. x' est un m'-flot (f',g')-réalisable dans G' alors
   x'_G est un (p,q)-flot (f,g)-réalisable dans G.
3. x^* est un m'-flot (f',g')-réalisable de c'-coût min. dans G' alors
   x^*_G est un (p,q)-flot (f,g)-réalisable de c -coût min. dans G.



Solution

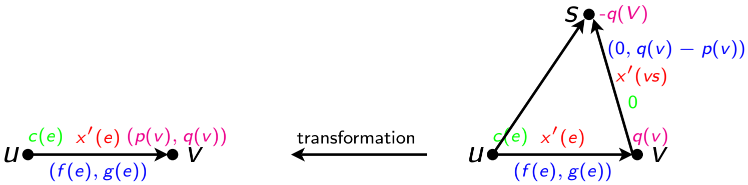
Question 1

1. x' est un m'-flot :
   1. $$\begin{aligned} d^+_{x'}(v) - d^-_{x'}(v) &= d^+_x(v) + x'(vs) - d^-_x(v) \\ &= d^+_x(v) + (q(v) - (d^+_x(v) - d^-_x(v))) - d^-_x(v) \\ &= q(v) = m'(v) \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$
   2. $$\begin{aligned} d^+_{x'}(s) - d^-_{x'}(s) &= 0 - \textstyle\sum_{v \in V}(q(v) - (d^+_x(v) - d^-_x(v))) \\ &= -q(V) + d^+_x(V) - d^-_x(V) \\ &= -q(V) = m'(s). \end{aligned}$$
2. x' est (f', g')-réalisable : Puisque x est un (p, q)-flot (f, g)-réalisable, $p(v) \leq d^+_x(v) - d^-_x(v) \leq q(v)\ \forall v \in V$, $f(e) \leq x(e) \leq g(e)\ \forall e \in A$.
   1. $f'(e) = f(e) \leq x(e) = x'(e) = x(e) \leq g(e) = g'(e)\ \forall e \in A$,
   2. $$\begin{aligned} f'(vs) = 0 &\leq q(v) - (d^+_x(v) - d^-_x(v)) = x'(vs) \\ &= q(v) - (d^+_x(v) - d^-_x(v)) \leq q(v) - p(v) = g'(vs) \quad \forall vs \in A'. \end{aligned}$$

Solution

Question 2

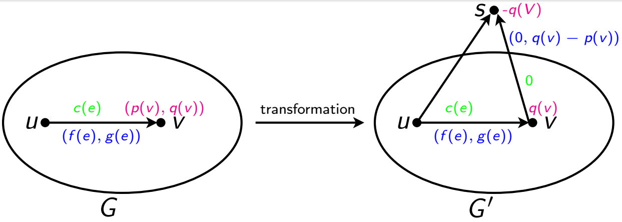
1. x'_G est un (p,q)-flot : Puisque x' est un m'-flot (f',g')-réalisable, $d^+_{x'}(v) - d^-_{x'}(v) = m'(v)\ \forall v \in V,\ f'(e) \leq x'(e) \leq g'(e)\ \forall e \in A(G')$.
   1. $$\begin{aligned} p(v) &= q(v) - (q(v) - p(v)) = m'(v) - g'(vs) \\ &\leq m'(v) - x'(vs) = d^+_{x'}(v) - d^-_{x'}(v) - x'(vs) \\ &= d^+_{x'_G}(v) - d^-_{x'_G}(v) = m'(v) - x'(vs) \\ &\leq q(v) - f'(vs) = q(v) - 0 = q(v) \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$
2. x'_G est (f,g)-réalisable : Puisque x' est (f',g')-réalisable,
   1. $f(e) = f'(e) \leq x'(e) = x'_G(e) = x'(e) \leq g'(e) = g(e)\ \forall e \in A.$



Solution

Question 3

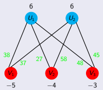
1. Soient Opt et Opt' les valeurs optimales pour Problèmes 1 et 2.
2. Soient x et x^* les solutions optimales pour Problèmes 1 et 2.
3. Soient x' et x^*_G les vecteurs définis dans Questions 1 et 2.
4. Par Questions 1 et 2, x' et x^*_G sont des solutions des Problèmes 2 et 1.
5. Par la définition de c', $c^Tx = (c')^Tx'$ et $(c')^Tx^* = c^Tx^*_G$,
6. $Opt = c^Tx = (c')^Tx' \geq Opt' = (c')^Tx^* = c^Tx^*_G \geq Opt$,
7. on a donc égalité partout, en particulier $c^Tx^*_G = Opt$.



Problème de transport

Définition

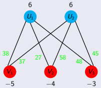
1. Étant donnés
   1. un graphe biparti $G = (U, V; E)$,
   2. une fonction b sur $U \cup V$ telle que $b(u) \geq 0\ \forall u \in U,\ b(v) \leq 0\ \forall v \in V$ et $b(U \cup V) = 0$,
   3. un coût p sur E,
2. trouver une fonction $y \geq 0$ sur les arêtes telle que
   1. $\sum\limits_{uv \in E} y(uv) = b(u)\ \forall u \in U,\ \sum\limits_{uv \in E} y(uv) = -b(v)\ \forall v \in V$
   2. qui minimise le coût $\sum_{e \in E} p(e)y(e)$.



Problème de transport

Définition

1. Étant donnés

   1. un graphe biparti $G = (U, V; E)$,
   2. une fonction b sur $U \cup V$ telle que
      $b(u) \geq 0 \ \forall u \in U, \ b(v) \leq 0 \ \forall v \in V$ et $b(U \cup V) = 0$,
   3. un coût p sur E,
2. trouver une fonction $y \geq 0$ sur les arêtes telle que
   1. $\sum\limits_{uv \in E} y(uv) = b(u) \ \forall u \in U, \ \sum\limits_{uv \in E} y(uv) = -b(v) \ \forall v \in V$
   2. qui minimise le coût $\sum_{e \in E} p(e)y(e)$.

Remarque

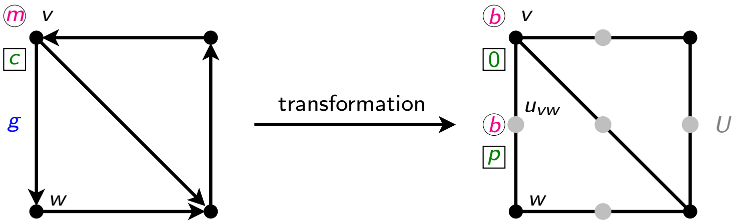
1. Problème de transport est un cas spécial du problème de flot de coût minimum.
2. Problème de flot de coût minimum se réduit au problème de transport.

Réduction

Construction:

Etant donné $(D = (V, A), m, g, c)$ qui satisfait les conditions nécessaires, on définit (G, b, p) :

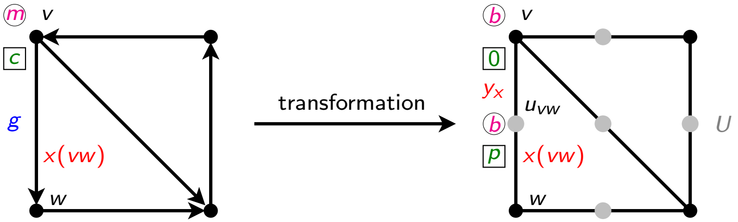
1. $G := (U, V; E)$ où $U := \{u_a : a \in A\}$, $E := \{vu_a, wu_a : a = vw \in A\}$,
2. $b(v) := \begin{cases} g(a) & \text{si } v = u_a \in U, \\ m(v) - d_g^+(v) & \text{si } v \in V, \end{cases}$
3. $p(e) := \begin{cases} 0 & \text{si } e = vu_a, a = vw, \\ c(vw) & \text{si } e = wu_a, a = vw. \end{cases}$



Réduction

Construction :

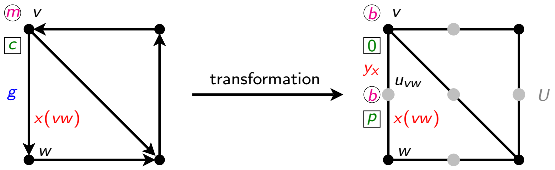
1. Pour une fonction x sur A on définit y_x sur E
$$y_x(e) := \begin{cases} g(vw) - x(vw) & \text{si } e = vu_{vw}, \\ x(vw) & \text{si } e = wu_{vw}. \end{cases}$$
2. Pour une fonction y sur E on définit x_y sur A
$$x_y(vw) := y(wu_{vw}).$$



Exercice de l'exam 2018

Exercice: Montrer que

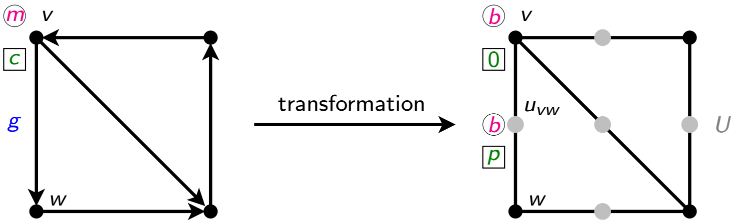
1. G est biparti.
2. $b(u) \geq 0 \ \forall u \in U, \ \ b(v) \leq 0 \ \forall v \in V$ et $b(U) + b(V) = 0$.
3. si x est un m-flot g-réalisable alors y_x est une solution du problème de transport dont le p-coût est le même que le c-coût de x.
4. si y est une solution du problème de transport alors x_y est un m-flot g-réalisable dont le c-coût est le même que le p-coût de y.
5. si y^* est une solution optimale de (G, b, p) alors x_{y^*} est une solution optimale de (D, m, g, c).



Solution

Questions 1 et 2

1. Puisque $E(U) = \emptyset = E(V)$, G est biparti.
2. $b(u_a) = g(a) \geq 0 \ \forall u_a \in U$,
   $b(v) = m(v) - d_g^+(v) \leq 0 \ \forall v \in V$,
   $b(U \cup V) = b(U) + b(V) = \sum_{a \in A} g(a) + \sum_{v \in V}(m(v) - d_g^+(v))$
   $= \sum_{a \in A} g(a) + m(V) - \sum_{a \in A} g(a) = m(V) = 0.$



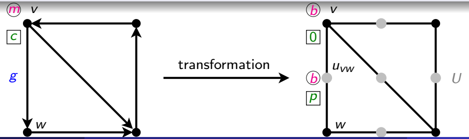
Solution

Question 3

Puisque x est un m-flot g-réalisable :

$$d_x^+(v) - d_x^-(v) = m(v)\ \forall v \in V \text{ et } 0 \leq x(a) \leq g(a)\ \forall a \in A.$$

1. $y_x(vu_a) = g(a) - x(a) \geq 0$, et $y_x(wu_a) = x(a) \geq 0\ \forall a = vw \in A$,
2. $y_x(vu_a) + y_x(wu_a) = (g(a) - x(a)) + x(a) = g(a) = b(u_a)\ \forall a = vw \in A$,
3. $$\begin{aligned}\sum_{vw \in E} y_x(vu_{vw}) &= \sum_{vw \in A} y_x(vu_{vw}) + \sum_{wv \in A} y_x(vu_{wv}) \\ &= \sum_{vw \in A} (g(vw) - x(vw)) + \sum_{wv \in A} x(wv) \\ &= d_g^+(v) - d_x^+(v) + d_x^-(v) \\ &= d_g^+(v) - m(v) = -b(v)\ \forall v \in V,\end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned}p^T y_x &= \sum_{u_{vw} \in U} (p(vu_{vw}) \cdot y_x(vu_{vw}) + p(wu_{vw}) \cdot y_x(wu_{vw})) \\ &= \sum_{vw \in A} (0 \cdot (g(vw) - x(vw)) + c(vw) \cdot x(vw)) = c^T x.\end{aligned}$$

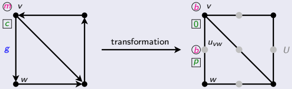


Solution

Question 4

Puisque y est une solution de (G, b, g),

$$y \geq 0,$$
$$y(vu_a) + y(wu_a) = b(u_a) = g(a) \ \forall a = vw \in A,$$
$$\sum_{vw \in E} y_x(vu_{vw}) = -b(v) \ \forall v \in V,$$



1. $$d^+_{x_y}(v) - d^-_{x_y}(v) = \sum_{a \in A} x_y(vw) - \sum_{wv \in A} x_y(wv)$$
$$= \sum_{vw \in A} y(u_{vw}w) - \sum_{wv \in A} y(vu_{wv})$$
$$= \sum_{vw \in A}(g(vw) - y(u_{vw}v)) - \sum_{wv \in A} y(vu_{wv})$$
$$= d^+_g(v) - \sum_{e \in \delta(v)} y(vu_e) = d^+_g(v) + b(v)$$
$$= d^+_g(v) + (m(v) - d^+_g(v)) = m(v).$$

2. $$0 \leq y(u_a w) = x_y(a) = y(u_a w) = g(a) - y(u_a v) \leq g(a) \ \forall a{=}vw{\in}A,$$

3. $$c^T x_y = \sum_{vw \in A} c(vw) \cdot x_y(vw)$$
$$= \sum_{vw \in A}(p(wu_{vw}) \cdot y(wu_{vw}) + 0 \cdot y(u_{vw}v))$$
$$= \sum_{e \in E} p(e) \cdot y(e) = p^T y.$$

Solution

Question 5

1. Soient Opt et Opt' les valeurs optimales pour Problèmes 1 et 2.
2. Soient x et y^* les solutions optimales pour Problèmes 1 et 2.
3. Par Questions 3 et 4, y_x et x_{y^*} sont des solutions des Problèmes 2 et 1 et $c^T x = p^T y_x, p^T y^* = c^T x_{y^*}$,
4. $Opt = c^T x = p^T y_x \geq Opt' = p^T y^* = c^T x_{y^*} \geq Opt$,
5. on a donc égalité partout, en particulier $c^T x_{y^*} = Opt$.