Optimisation Combinatoire 2A
Flots de coût minimum 2 TD

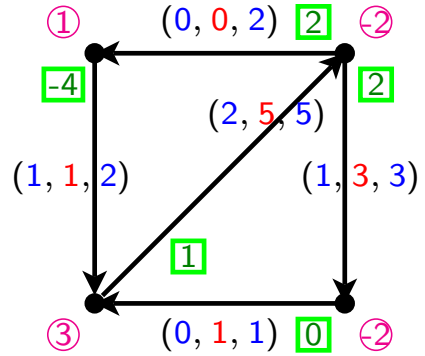
Zoltán Szigeti

Ensimag
Grenoble INP

Définition des m-flots

Définition

1. Étant donnés
   1. un graphe orienté $G = (V, A)$,
   2. une fonction m sur les sommets de G,
   3. deux capacités f et g sur chaque arc e de G avec $f(e) \leq g(e)\ \forall e \in A$,
   4. un coût c sur les arcs de G,
2. une fonction x sur les arcs est
   1. un m-flot si $d_x^+(v) - d_x^-(v) = m(v) \quad \forall v \in V$.
   2. réalisable si $f(e) \leq x(e) \leq g(e) \quad \forall e \in A$.



$(f(e), x(e), g(e))$

$m(v)$ $\quad$ $c(e)$

Problème : Flot de coût minimum

Etant donnés (G, m, f, g, c), trouver dans G un m-flot (f, g)-réalisable de c-coût $(\sum_{e \in A} c(e)x(e))$ minimum.

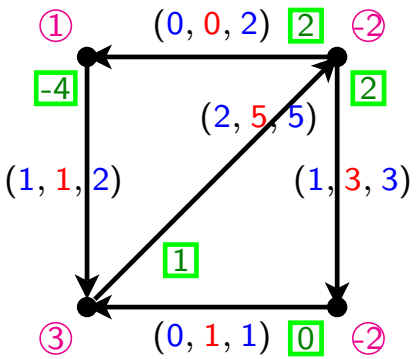
m-flot avec $f \equiv 0$

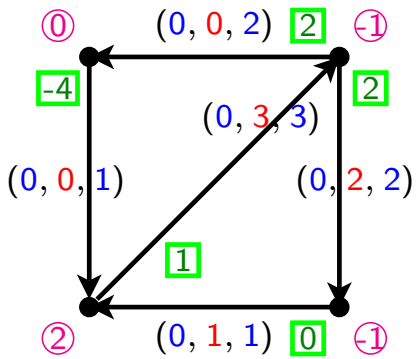
Transformation 1 : $f^2(e) = 0$ $\forall e \in A$.

$$
\begin{aligned}
(f^2(e), g^2(e)) &:= (0, g^1(e) - f^1(e)) && \forall e \in A, \\
m^2(v) &:= m^1(v) - (d^+_{f^1}(v) - d^-_{f^1}(v)) && \forall v \in V. \\
c^2(e) &:= c^1(e) && \forall e \in A.
\end{aligned}
$$

Lemme

x est un m^1-flot (f^1, g^1)-réalisable de c^1-coût minimum $\Longleftrightarrow$
$x - f^1$ est un m^2-flot (f^2, g^2)-réalisable de c^2-coût minimum.



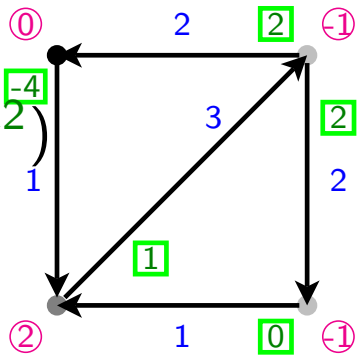


(s, t)-Flots

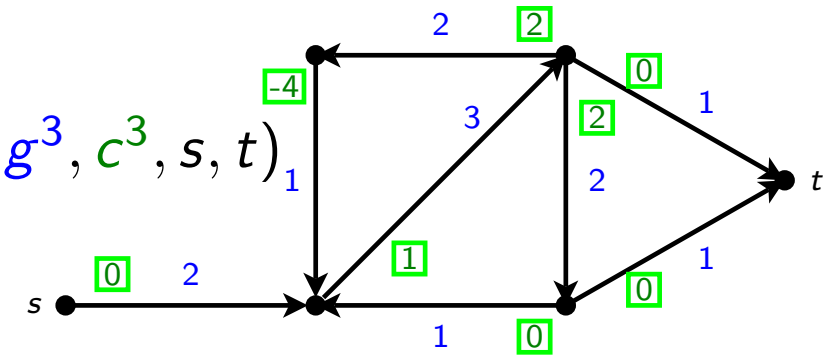
Transformation 2 : $m^3(v) = 0$ $\forall v \in V^3 \setminus \{s, t\}$ où $s, t \in V^3$.

1. $S := \{v : m^2(v) > 0\}$, $T := \{v : m^2(v) < 0\}$.
2. $(G^3 := (V^3, A^3), g^3, c^3)$ où
   $V^3 := V^2 \cup \{s, t\}$ et $A^3 := A^2 \cup \{sv : v \in S\} \cup \{ut : u \in T\}$.
3. $$g^3(uv) := \begin{cases} g^2(uv) & \text{si } uv \in A^2, \\ m^2(v) & \text{si } u = s, v \in S, \\ -m^2(u) & \text{si } u \in T, v = t. \end{cases}$$
4. $$c^3(e) := \begin{cases} c^2(e) & \text{si } e \in A^2, \\ 0 & \text{si } e \in A^3 \setminus A^2. \end{cases}$$

(G^2, m^2, g^2, c^2)



(G^3, g^3, c^3, s, t)

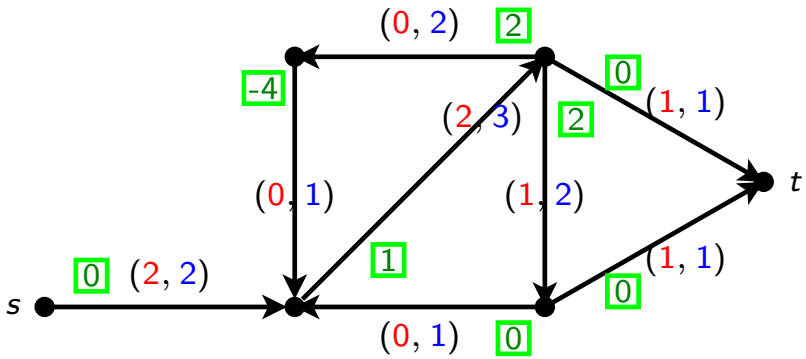


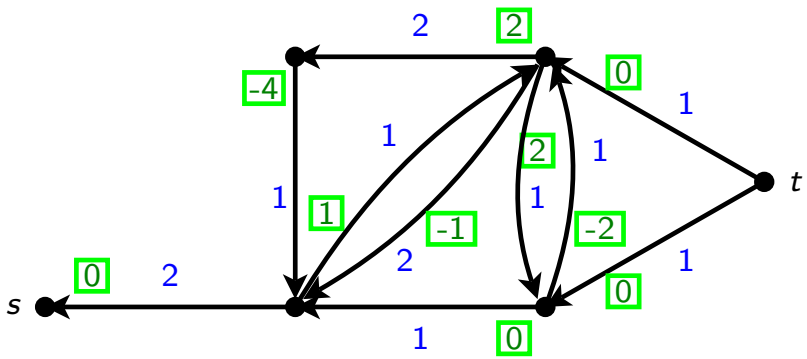
Réseau auxiliaire

Construction

(G_x, g_x, c_x) associé à (G, g, c, s, t, x) :

1. $G_x = (V, A_x^1 \cup A_x^2)$ où
   1. $A_x^1 := \{uv \in A : x(uv) < g(uv)\}$ et
   2. $A_x^2 := \{vu : uv \in A, x(uv) > 0\}$,
2. $g_x(uv) := \begin{cases} g(uv) - x(uv) & \text{si } uv \in A_x^1, \\ x(vu) & \text{si } uv \in A_x^2. \end{cases}$
3. $c_x(uv) := \begin{cases} c(uv) & \text{si } uv \in A_x^1, \\ -c(vu) & \text{si } uv \in A_x^2. \end{cases}$





Conditions d'optimalité

Théorème

Étant donné un (s,t)-flot g-réalisable x pour (G,g,c,s,t), les conditions suivantes sont équivalentes :

1. x est un (s,t)-flot g-réalisable de c-coût minimum,
2. (G_x, c_x) est sans circuit absorbant.

Algorithme pour trouver un flot réalisable de valeur k de coût minimum

Algorithme (Suppression des circuits absorbants)

Entrée : (G, g, c, s, t) après Transformations 1 et 2, $k := cap_g(s)$.

Sortie : Soit un (s,t)-flot g-réalisable x de valeur k de c-coût minimum, soit une (s,t)-coupe Z de g-capacité inférieure à k.

1. Chercher un (s,t)-flot g-réalisable x de valeur k (par flots).
   - S'il n'y a pas : arrêter avec une (s,t)-coupe Z de g-capacité $< k$.
2. Chercher un circuit absorbant C dans (G_x, c_x) (par plus courts chemins).
   - S'il n'y a pas : arrêter avec le (s,t)-flot g-réalisable x de valeur k de c-coût minimum.
   - Sinon : changer le flot sur C et Aller à 2.

Algorithme (Suppression des circuits absorbants)

Etape 1: *Recherche d'un (s,t)-flot g-réalisable de valeur k dans $(G=(V,A),g)$.*

Appliquer l'algorithme d'Edmonds-Karp à (G,g,s,t) pour obtenir
un (s,t)-flot g-réalisable x de valeur maximum et
une (s,t)-coupe Z de g-capacité minimum.

Si $cap_g(Z) < k$ alors arrêter avec Z.

Etape 2: *Recherche d'un circuit absorbant dans (G_x,c_x).*

Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig à (G_x,c_x,t).

S'il s'arrête avec les plus courts chemins de t alors arrêter avec x.

Etape 3: *Changement du flot.*

S'il s'arrête avec un circuit absorbant C alors

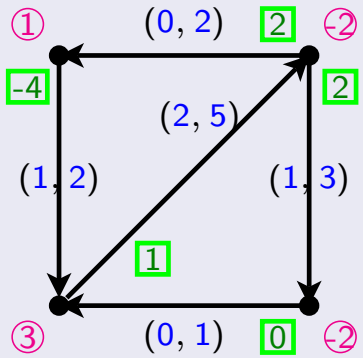
$\varepsilon := \min\{g_x(uv) : uv \in A(C)\}$,

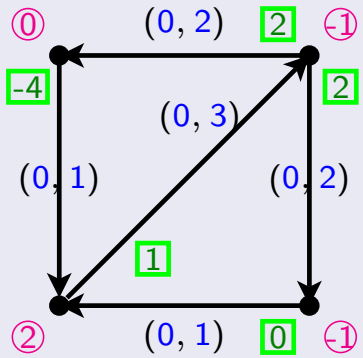
$$x(uv) := \begin{cases} x(uv)+\varepsilon & \text{si } uv \in A(C)\cap A_x^1 \\ x(uv)-\varepsilon & \text{si } vu \in A(C)\cap A_x^2 \\ x(uv) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Aller à l'Etape 2.

Exécution de l'algorithme

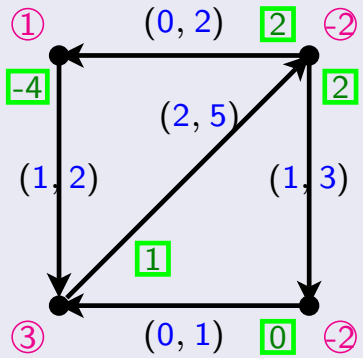
Transformation 1:
$(G^2 = G^1, m^2 = m^1 - (d^+_{f^1} - d^-_{f^1}), f^2 := 0, g^2 = g^1 - f^1, c^2 = c^1)$

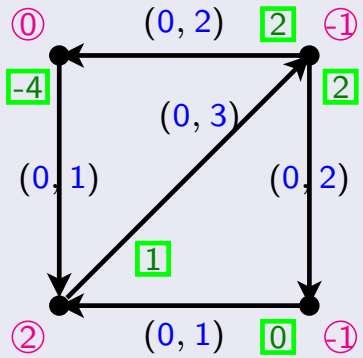




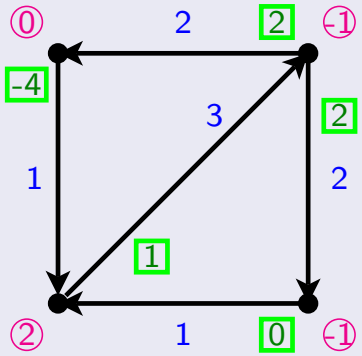
Exécution de l'algorithme

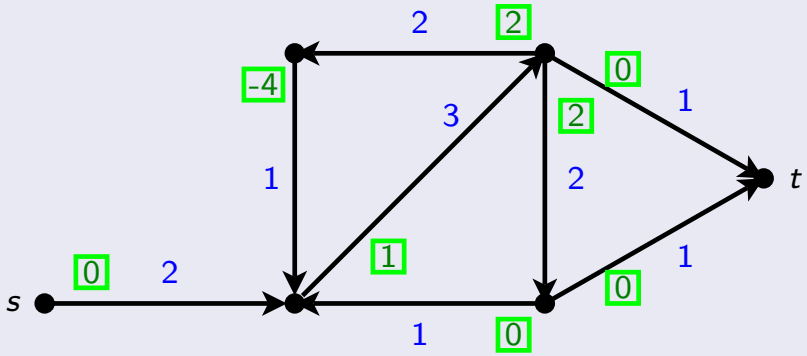
Transformation 1: $(G^2 = G^1, m^2 = m^1 - (d^+_{f^1} - d^-_{f^1}), f^2 := 0, g^2 = g^1 - f^1, c^2 = c^1)$





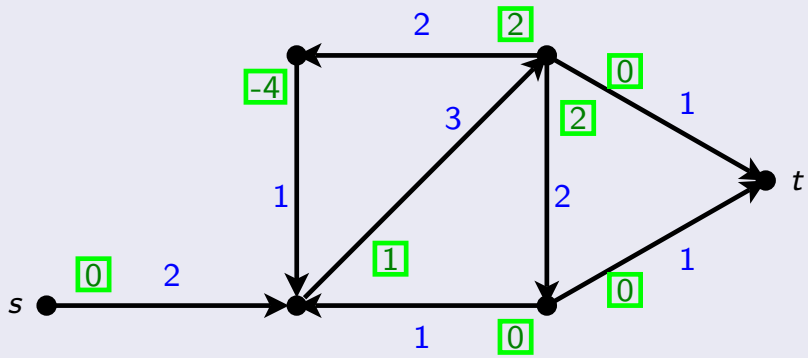
Transformation 2: $(G^3, g^3, c^3), s, t$

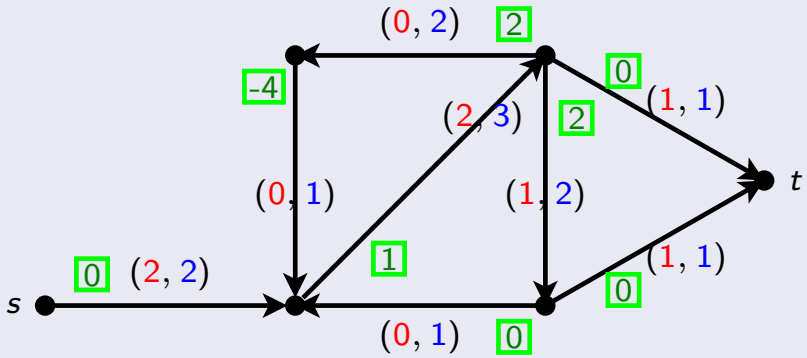




Exécution de l'algorithme

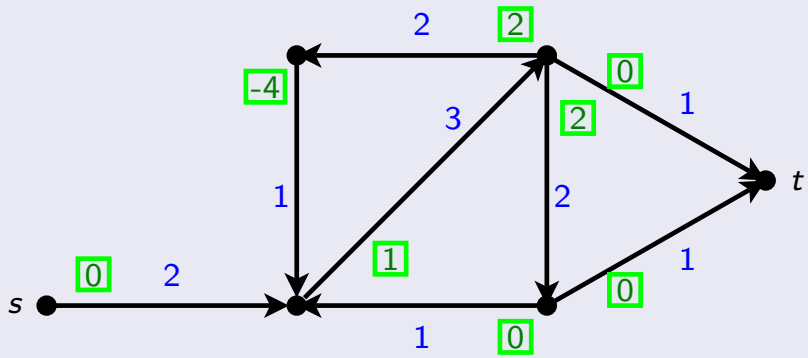
Un flot réalisable x de valeur 2 dans (G^3, g^3)

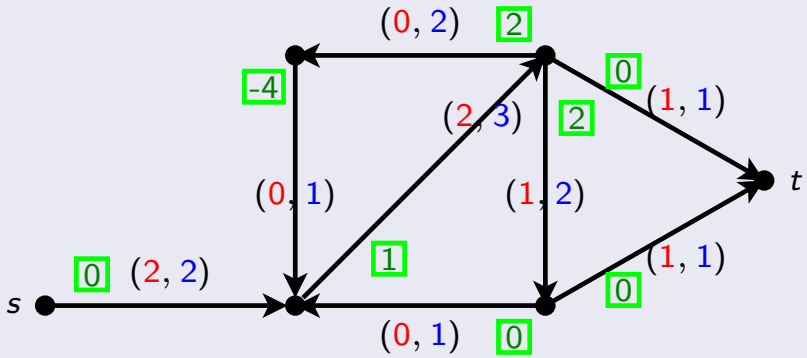




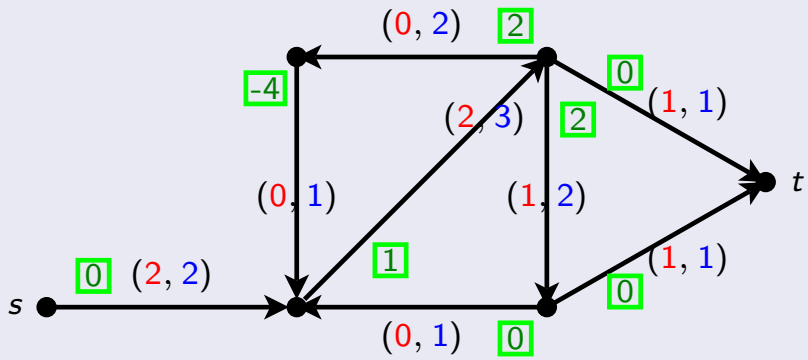
Exécution de l'algorithme

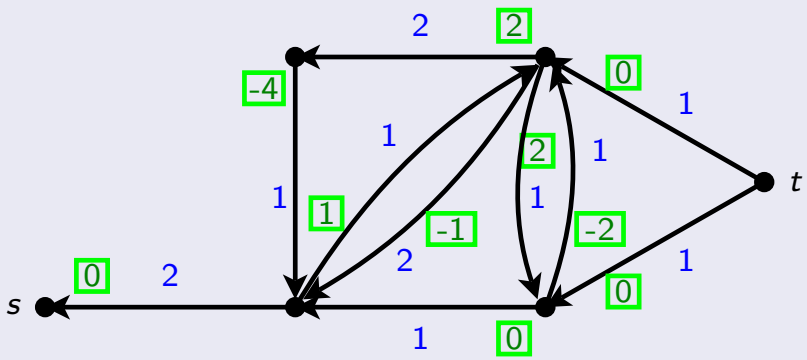
Un flot réalisable x de valeur 2 dans (G^3, g^3)





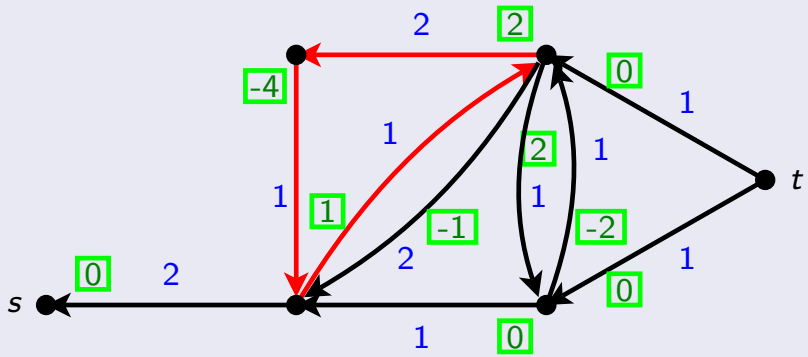
Graphe auxiliaire (G^3_x, g^3_x, c^3_x)

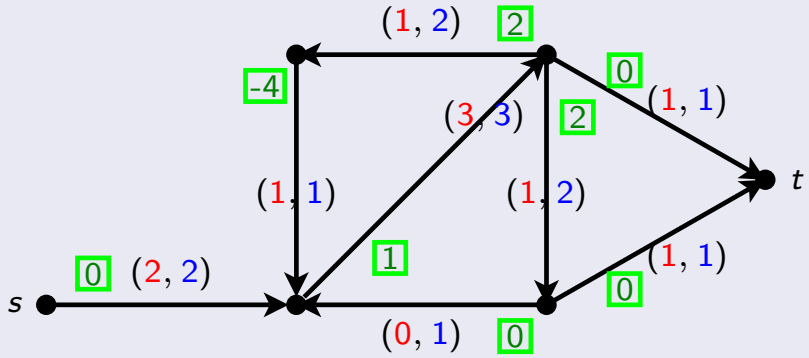




Exécution de l'algorithme

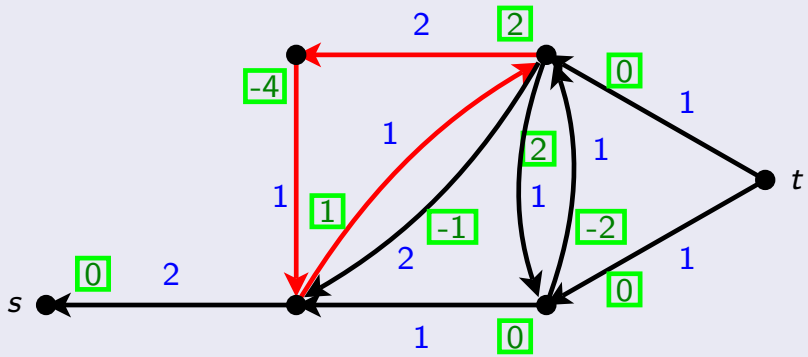
Circuit absorbant C de (G_x^3, c_x^3) et le nouveau flot g^3-réalisable x' de valeur 2 dans G^3

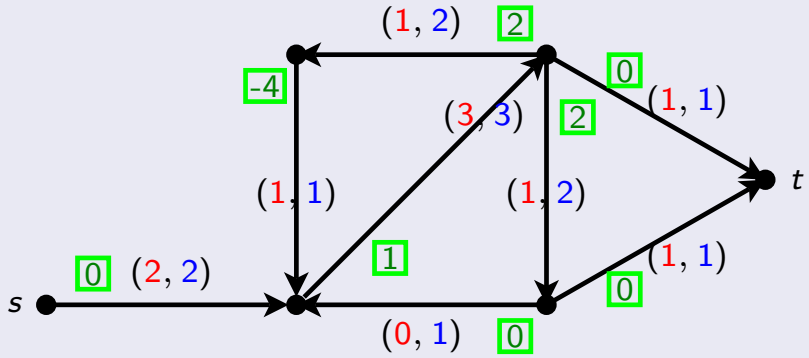




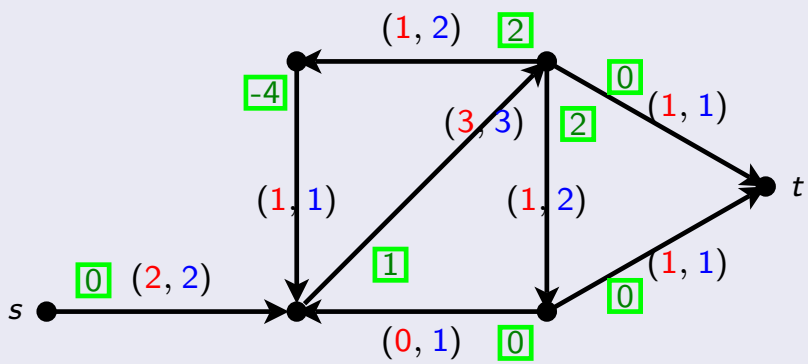
Exécution de l'algorithme

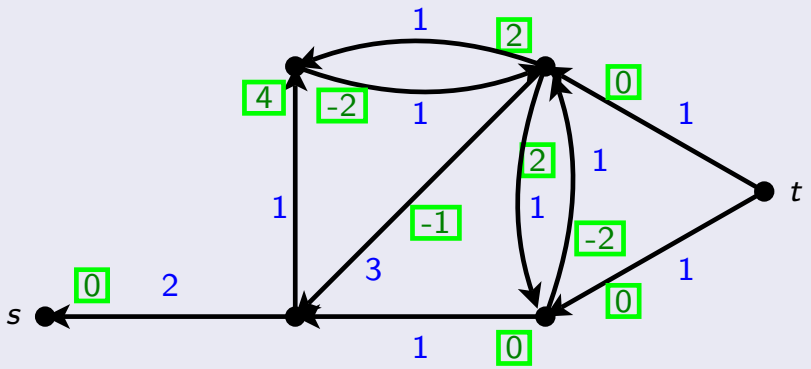
Circuit absorbant C de (G_x^3, c_x^3) et le nouveau flot g^3-réalisable x' de valeur 2 dans G^3





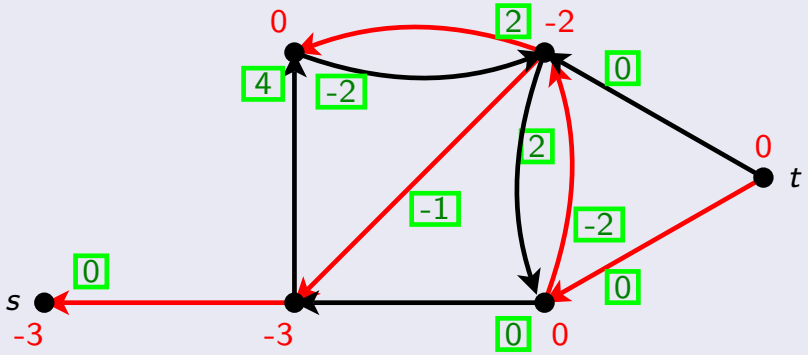
Graphe auxiliaire $(G_{x'}^3, g_{x'}^3, c_{x'}^3)$

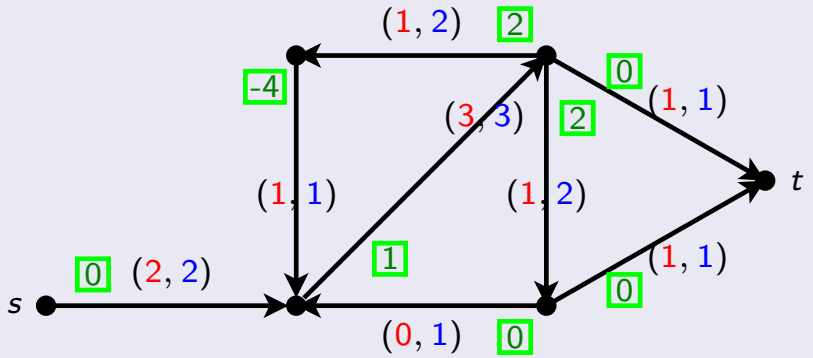




Exécution de l'algorithme

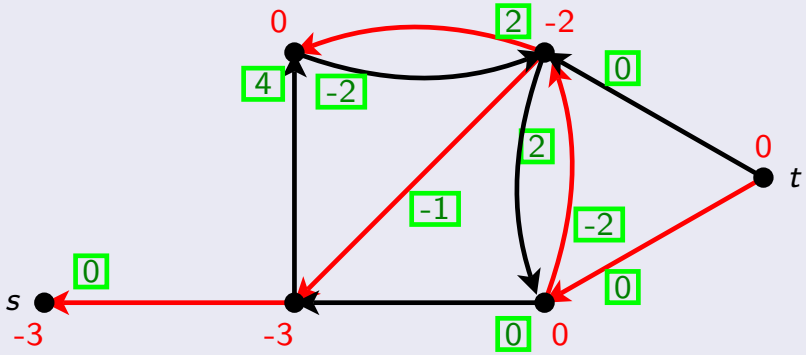
Potentiel de $(G^3_{x'}, c^3_{x'})$ et donc x' est un (s,t)-flot g^3-réalisable de valeur 2 de c^3-coût minimum dans G^3

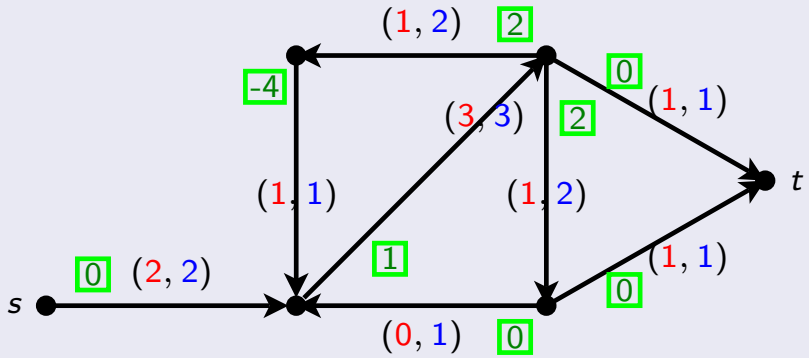




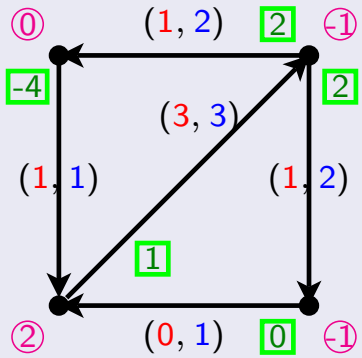
Exécution de l'algorithme

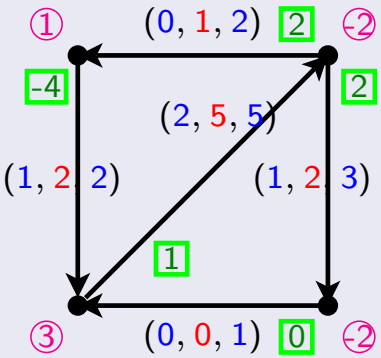
Potentiel de $(G^3_{x'}, c^3_{x'})$ et donc x' est un (s,t)-flot g^3-réalisable de valeur 2 de c^3-coût minimum dans G^3





$x'_G + f^1$ est un m^1-flot (f^1, g^1)-réalisable de c^1-coût minimum

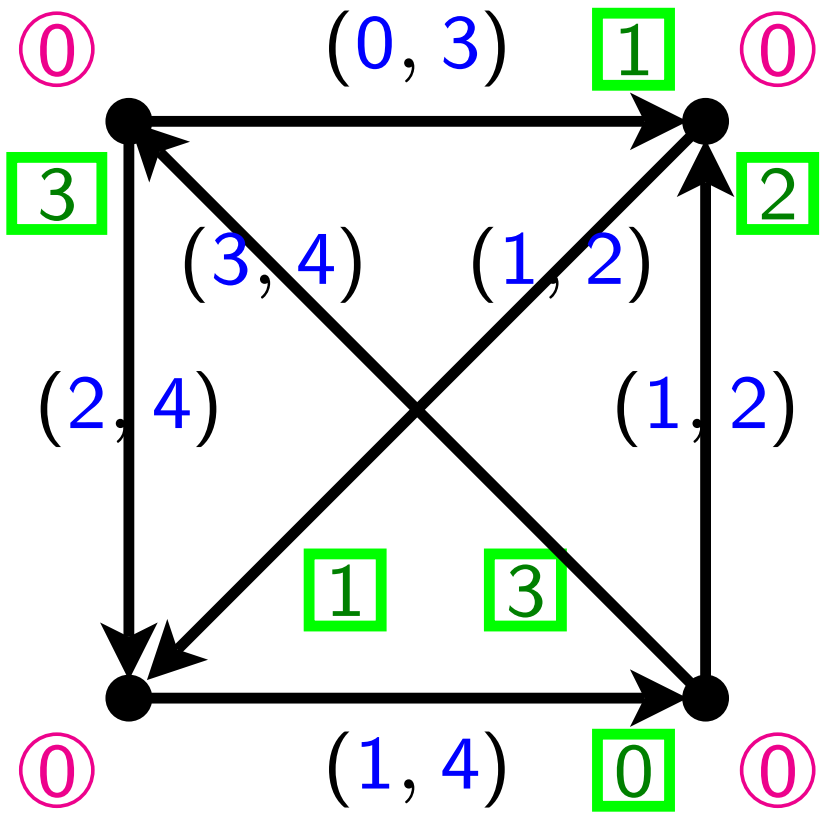




Exécution de l'algorithme 2

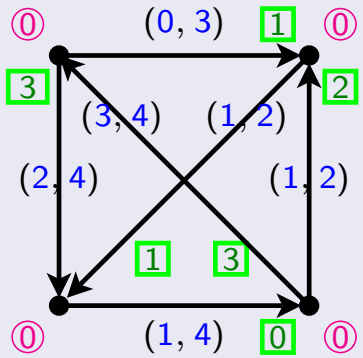
Énoncé

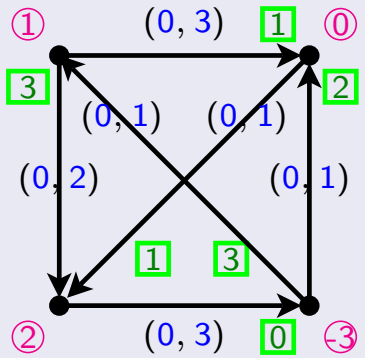
Etant donnés (G, m, f, g, c), trouver dans G un m-flot (f, g)-réalisable de c-coût minimum.



Exécution de l'algorithme

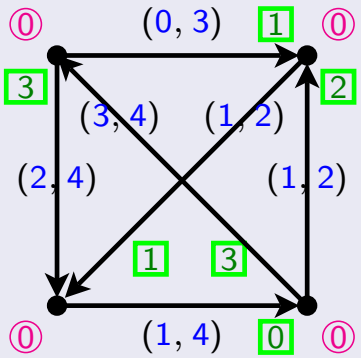
Transformation 1:
$(G^2 = G^1, m^2 = m^1 - (d^+_{f^1} - d^-_{f^1}), f^2 := 0, g^2 = g^1 - f^1, c^2 = c^1)$

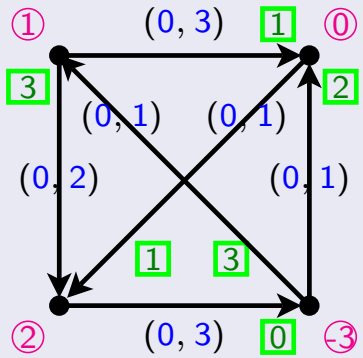




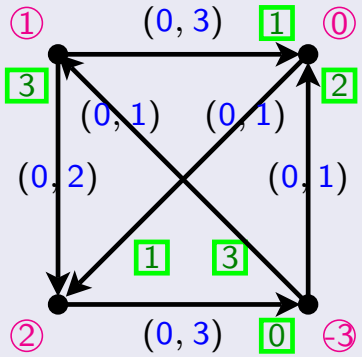
Exécution de l'algorithme

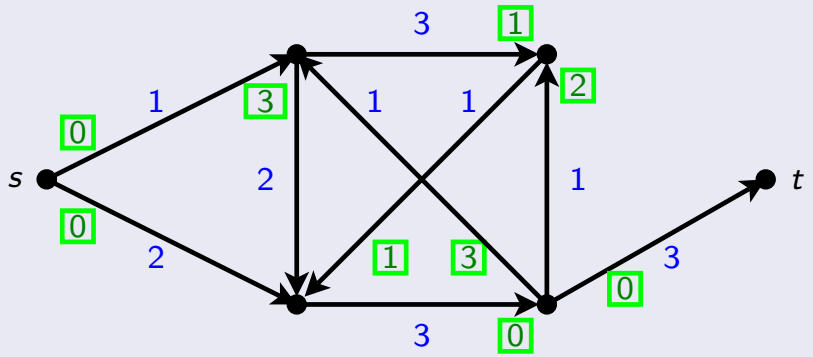
Transformation 1: $(G^2 = G^1, m^2 = m^1 - (d^+_{f^1} - d^-_{f^1}), f^2 := 0, g^2 = g^1 - f^1, c^2 = c^1)$





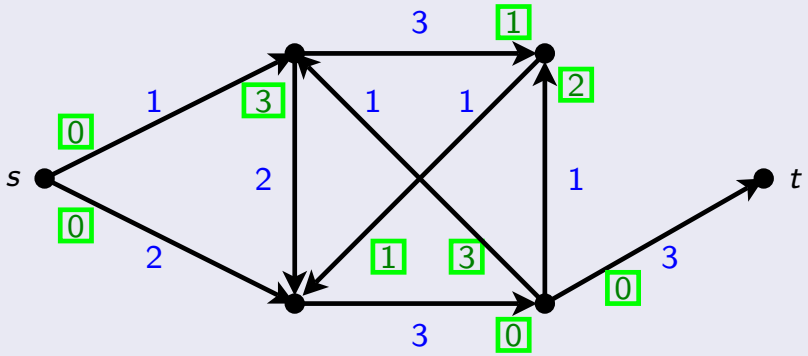
Transformation 2: $(G^3, g^3, c^3), s, t$

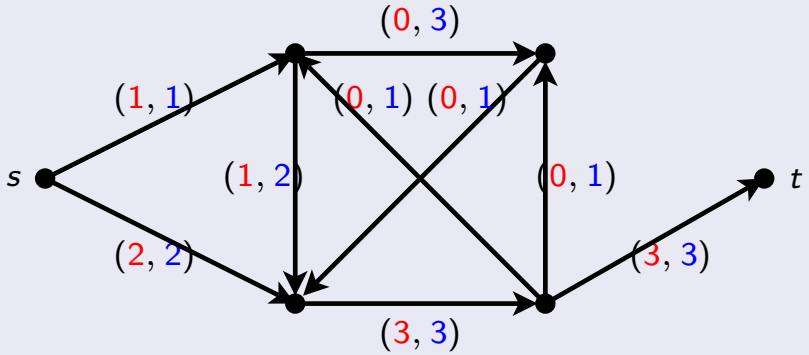




Exécution de l'algorithme

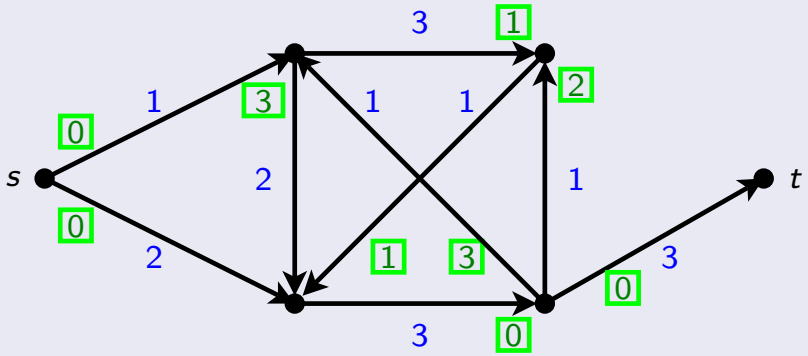
Un flot réalisable x de valeur 3 dans (G^3, g^3)

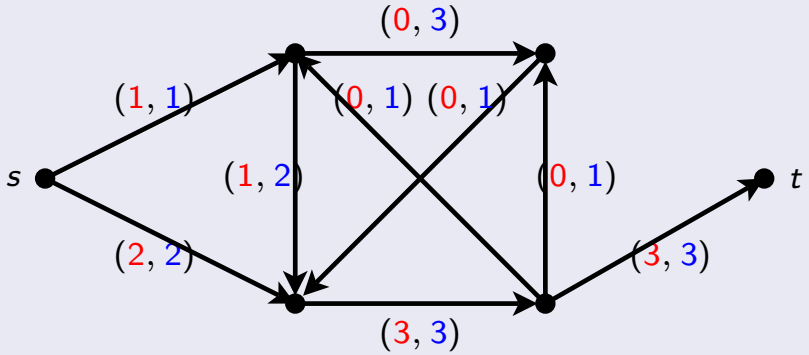




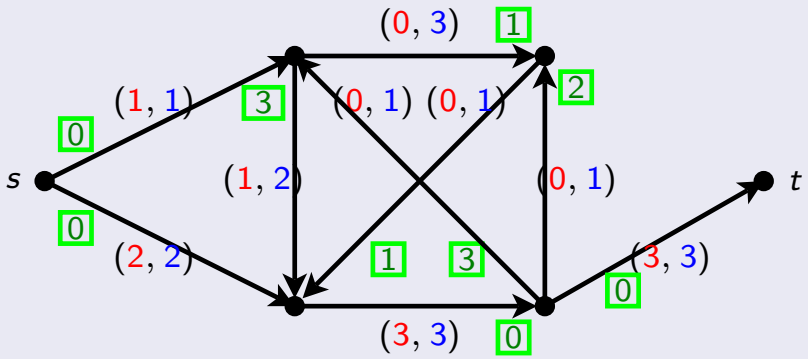
Exécution de l'algorithme

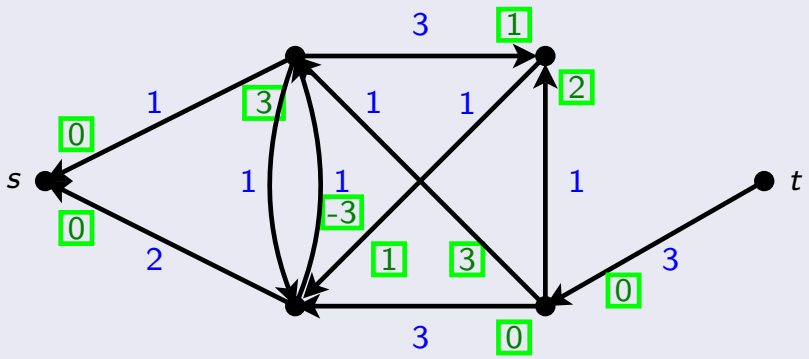
Un flot réalisable x de valeur 3 dans (G^3, g^3)





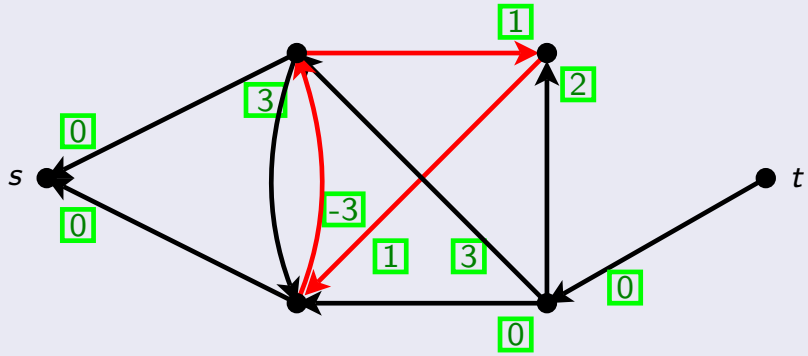
Graphe auxiliaire (G^3_x, g^3_x, c^3_x)

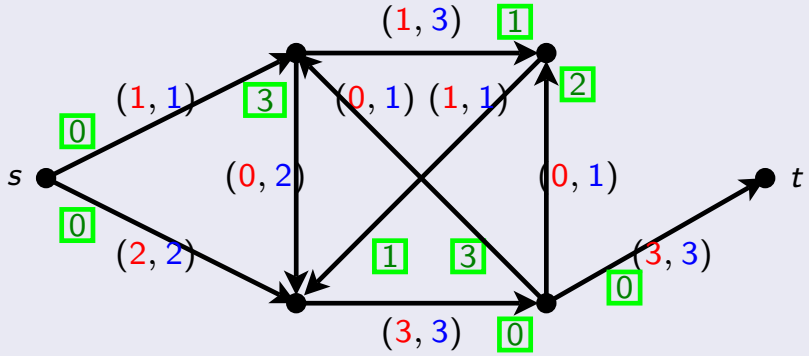




Exécution de l'algorithme

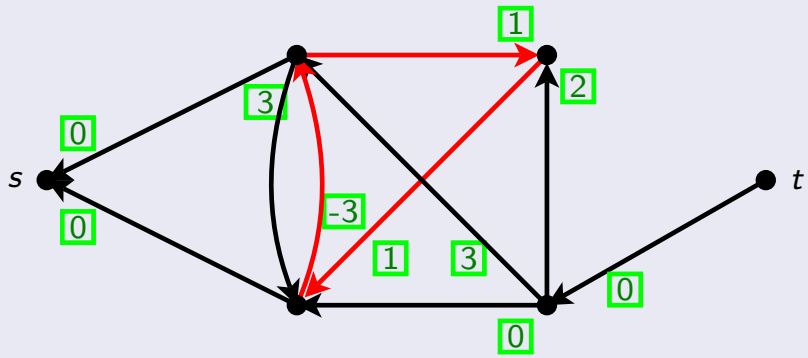
Circuit absorbant C de (G_x^3, c_x^3) et le nouveau flot g^3-réalisable x' de valeur 3 dans G^3

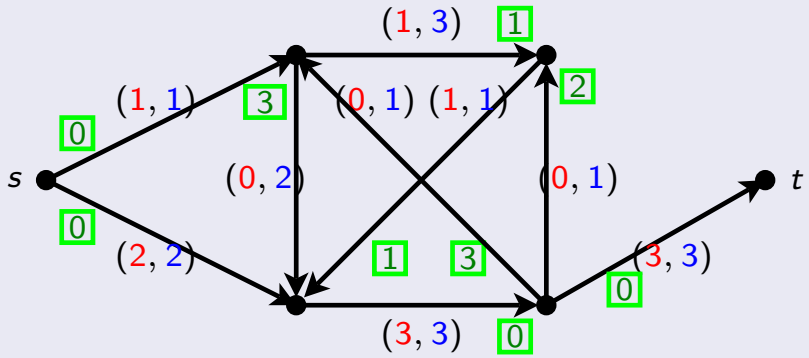




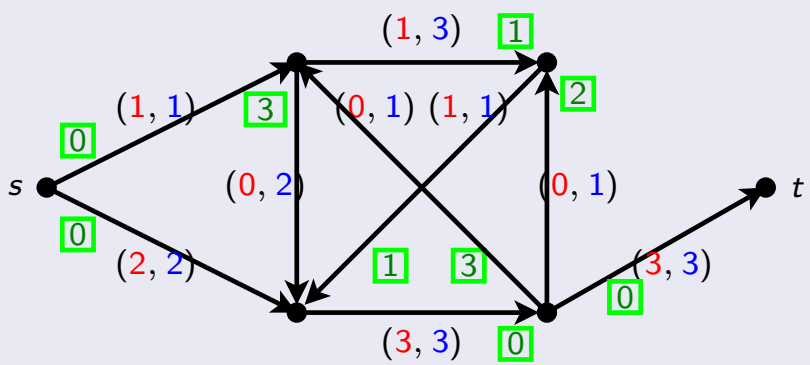
Exécution de l'algorithme

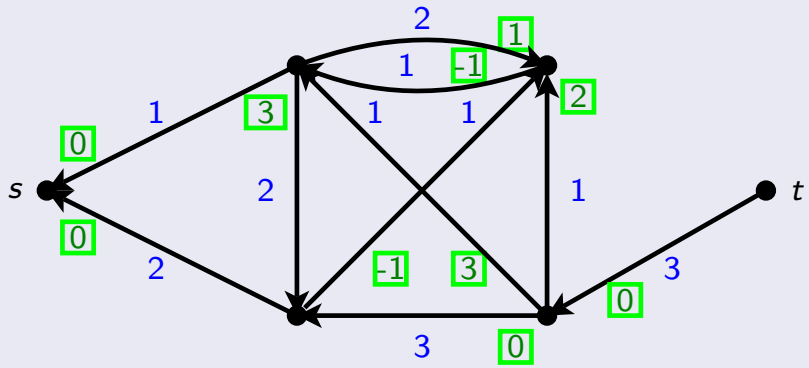
Circuit absorbant C de (G_x^3, c_x^3) et le nouveau flot g^3-réalisable x' de valeur 3 dans G^3





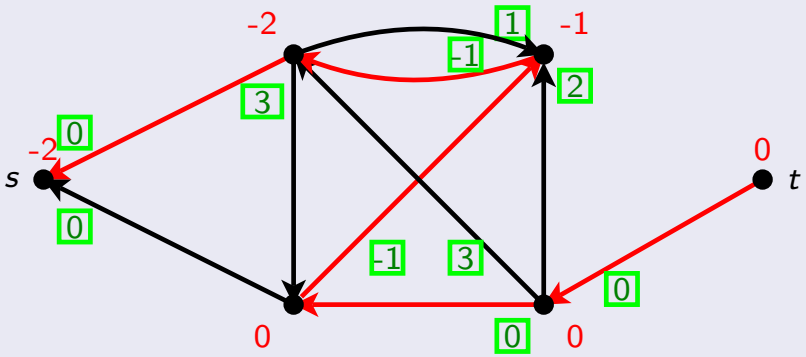
Graphe auxiliaire $(G_{x'}^3, g_{x'}^3, c_{x'}^3)$

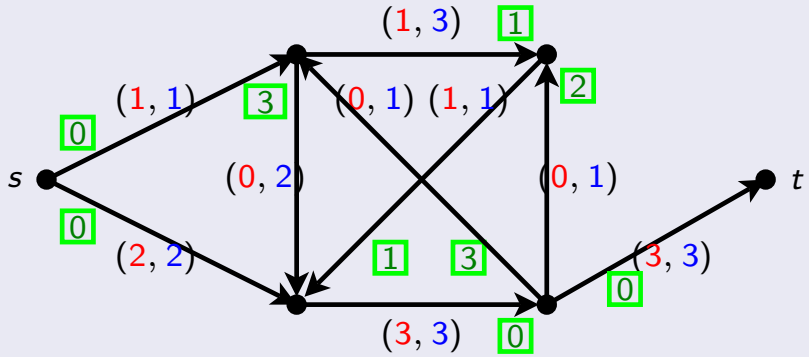




Exécution de l'algorithme

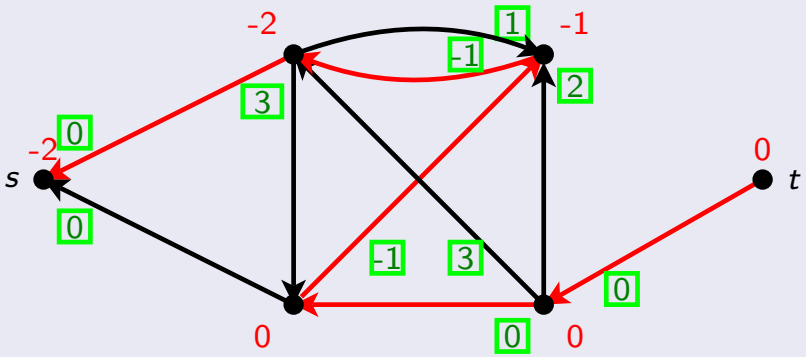
Potentiel de $(G^3_{x'}, c^3_{x'})$ et donc x' est un (s,t)-flot g^3-réalisable de valeur 3 de c^3-coût minimum dans G^3

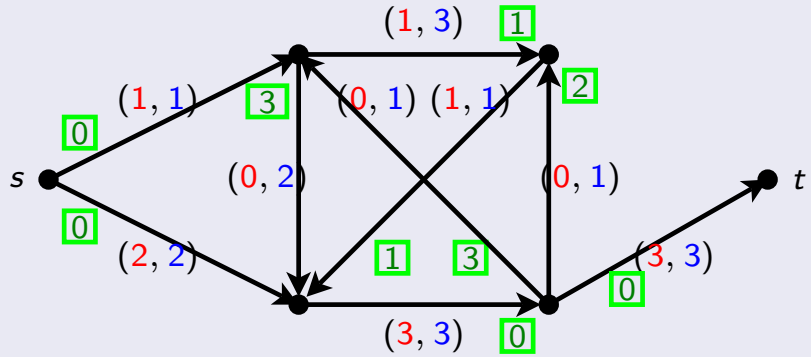
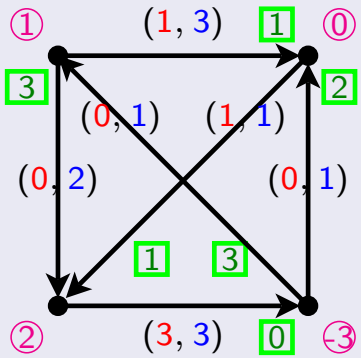
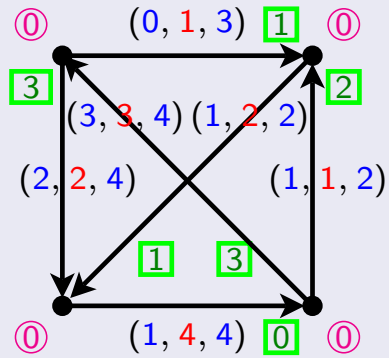




Exécution de l'algorithme

Potentiel de $(G^3_{x'}, c^3_{x'})$ et donc x' est un (s,t)-flot g^3-réalisable de valeur 3 de c^3-coût minimum dans G^3





$x'_G + f^1$ est un m^1-flot (f^1, g^1)-réalisable de c^1-coût minimum