# Optimisation Combinatoire 2A
# Flots de coût minimum TD

Zoltán Szigeti

Ensimag
Grenoble INP

# Algorithme pour trouver une circulation réalisable

## Algorithme

Entrée: Réseau $(G, f, g)$ avec $f \leq g$.

Sortie : Circulation réalisable ou coupe violant la condition de Hoffmann.

Étape 1 : Si $f$ est une circulation : Stop avec la circulation réalisable $f$.

Étape 2 : Construire le réseau $(G', g', s, t)$.

Étape 3 : Trouver dans $(G', g', s, t)$ par l'algorithme d'Edmonds-Karp
un $(s, t)$-flot réalisable de valeur maximum $x'$ et
une $(s, t)$-coupe de capacité minimum $Z \cup s$.

Étape 4 : Si $val(x') = M$ : Stop avec la circulation réalisable $x := f + x'_G$.

Étape 5 : Stop avec $Z$ qui viole la condition de Hoffmann.

# Circulation entière

## Théorème

Si $f(e)$ et $g(e)$ sont entiers pour chaque arc $e$ de $G$ et
s'il existe une circulation réalisable dans $(G, f, g)$, alors
il en existe une, $x$, telle que $x(e)$ soit entier pour chaque arc $e$ de $G$.

## Démonstration

1. On exécute l'algorithme précédent.
2. Si on s'arrête avec $f$, alors $f(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.
3. Dans $(G', g')$, $g'(e) = g(e) - f(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.
4. Par l'algorithme d'Edmonds-Karp, $x'(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.
5. On ne peut pas s'arrêter avec $Z$ qui viole la condition de Hoffmann car il existe une circulation réalisable.
6. On s'arrête avec la circulation réalisable $x = f + x'_G$ et $x(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.

# Exercice 4.11 : Ordonnancement d'avions

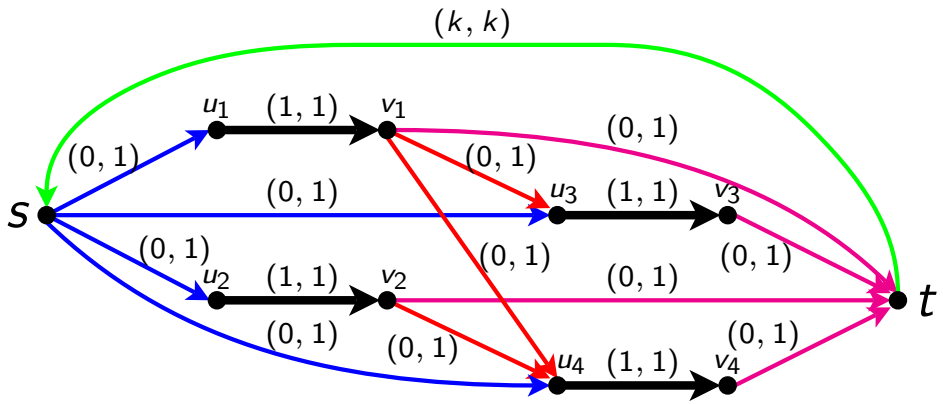
## Énoncé

1. Le chef d'une compagnie aérienne veut minimiser le nombre d'avions en effectuant tous les vols de la compagnie.
2. Il connait bien sûr pour chaque vol toutes les informations, à savoir : la ville de départ et de destination et l'heure de départ et d'arrivé.
3. Il connait aussi le temps de vol de n'importe quelle ville à n'importe quelle ville.
4. Modéliser ce problème par un problème de circulation dans un réseau.

# Exercice 4.11

## Construction d'un réseau

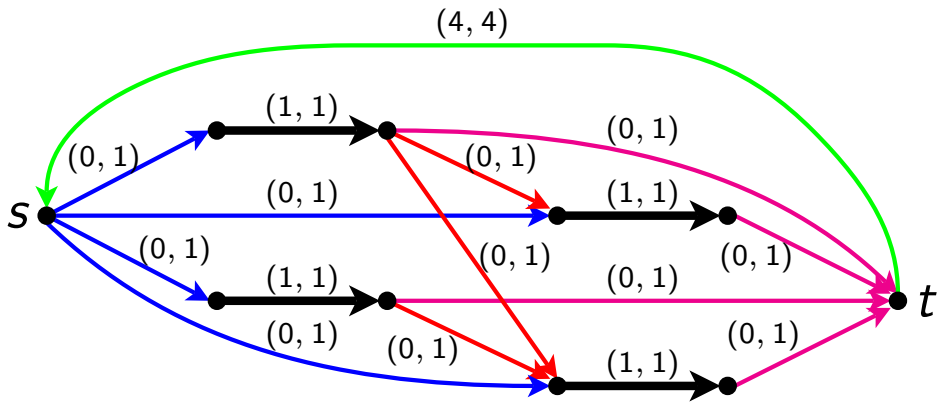
1. $vol_i < vol_j$ : l'heure d'arrivée du $vol_i$ + le temps du vol de ville d'arrivée du $vol_i$ à la ville de départ du $vol_j$ est avant l'heure de départ du $vol_j$ ($\Longleftrightarrow$ même avion peut effectuer $vol_j$ après $vol_i$).
2. Réseau $(G := (V, A), f, g)$ :
   1. $V := \{u_i, v_i : \forall vol_i\} \cup \{s, t\}$,
   2. $A := \{su_i,\ \boldsymbol{u_i v_i},\ v_i t : \forall vol_i\} \cup \{v_i u_j : vol_i < vol_j\} \cup \{ts\}$,
   3. $(f(e), g(e)) := \begin{cases} (1,1) & \text{si } e = u_i v_i, \\ (0,1) & \text{si } e = su_i, v_i t, v_i u_j \\ (k,k) & \text{si } e = ts. \end{cases}$



# Exercice 4.11

## Solution

1. Au début $k :=$ nombre de vols à effectuer.
2. Il existe une circulation réalisable !
3. On diminue $k$ un par un jusqu'il existe encore une circulation réalisable.
4. Puisque les capacités sont entières, il en existe une qui est entière.
5. C'est le nombre minimum d'avions qui peuvent effectuer tous les vols de la compagnie.

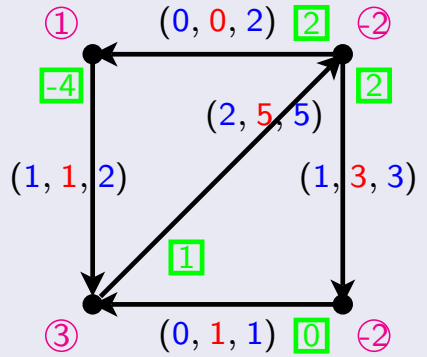


# Définition des $m$-flots

## Définition

1. Étant donnés
   1. un graphe orienté $G = (V, A)$,
   2. une fonction $m$ sur les sommets de $G$,
   3. deux capacités $f$ et $g$ sur chaque arc $e$ de $G$ avec $f(e) \leq g(e)\ \forall e \in A$,
   4. un coût $c$ sur les arcs de $G$,
2. une fonction $x$ sur les arcs est
   1. un $m$-flot si la ***m*-conservation du flot** est vérifiée : $d_x^+(v) - d_x^-(v) = m(v) \quad \forall v \in V$.
   2. réalisable si la **contrainte de capacités** est vérifiée : $f(e) \leq x(e) \leq g(e) \quad \forall e \in A$.

## Exemple




$(f(e), x(e), g(e))$

$m(v)$ $\quad$ $c(e)$

## Problème : Flot de coût minimum

Etant donnés $(G, m, f, g, c)$, trouver dans $G$ un $m$-flot $(f, g)$-réalisable de $c$-coût $(c^T x = \sum_{e \in A} c(e)x(e))$ minimum.

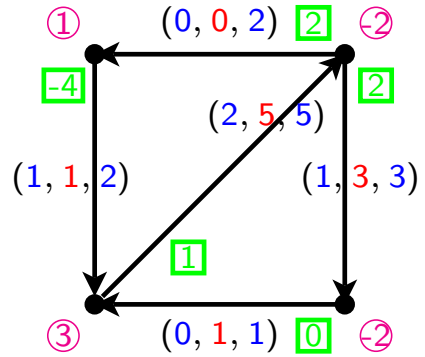
# Exercice 5.1

## Énoncé

Il existe un $m$-flot $(f, g)$-réalisable dans $G$ $\iff$

$$m(V) = 0,$$

$$d_g^+(Z) - d_f^-(Z) \geq m(Z)\ \forall Z \subseteq V.$$




$(f(e), x(e), g(e))$

$m(v)$ $\quad$ $c(e)$

## Démonstration de la nécessité

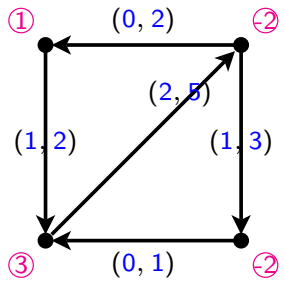
1. Supposons qu'il existe un $m$-flot $(f, g)$-réalisable $x$ dans $(G, m, f, g)$.
2. $m(V) = d_x^+(V) - d_x^-(V) = 0,$
3. $d_g^+(Z) - d_f^-(Z) \geq d_x^+(Z) - d_x^-(Z) = m(Z)\ \forall Z \subseteq V.$

# Exercice 5.1

## Démonstration de la suffisance

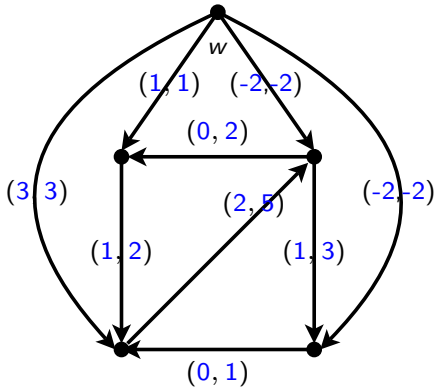
Pour $(G, m, f, g)$, on introduit un nouveau réseau $(G', f', g')$ où

1. $G' := (V', A')$,
2. $V' := V \cup w$,
3. $A' := A \cup \{wv : v \in V\}$,
4. $(f'(e), g'(e)) := \begin{cases} (f(e), g(e)) & \text{si } e \in A, \\ (m(v), m(v)) & \text{si } e = wv. \end{cases}$




$(f(e), g(e))$

$m(v)$

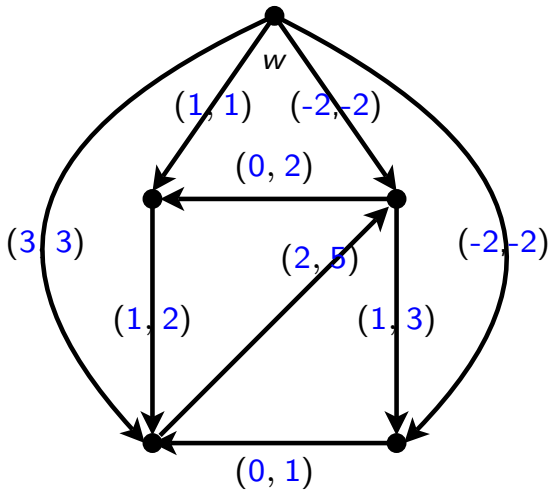



$(f'(e), g'(e))$

# Exercice 5.1

## Démonstration de la suffisance

1. Supposons que les conditions sont satisfaites pour $(G, m, f, g)$.
2. Nous vérifions que $(G', f', g')$ satisfait la condition de Hoffmann.
3. $d^+_{(G',g')}(Z) - d^-_{(G',f')}(Z) = d^+_{(G,g)}(Z) - d^-_{(G,f)}(Z) - m(Z) \geq 0 \; \forall Z \subseteq V$.
4. $d^+_{(G',g')}(Z \cup w) - d^-_{(G',f')}(Z \cup w) = d^+_{(G,g)}(Z) + m(V - Z) - d^-_{(G,f)}(Z) = d^+_{(G,g)}(Z) - d^-_{(G,f)}(Z) + m(V) - m(Z) \geq 0 \; \forall Z \subseteq V$.

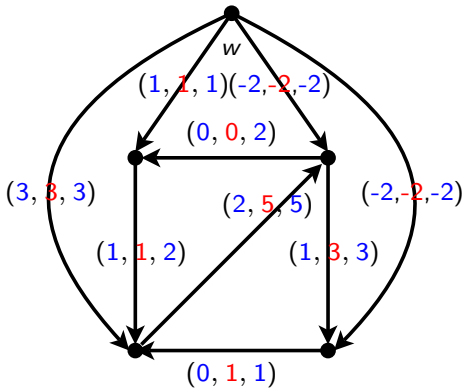



$(f'(e), g'(e))$

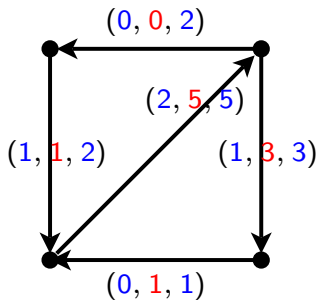
# Exercice 5.1

## Démonstration de la suffisance

1. Par le théorème de Hoffmann, il existe donc dans $(G', f', g')$ une circulation $(f', g')$-réalisable $x'$.
2. $x'_G$ est un $m$-flot $(f, g)$-réalisable :
3. $(f, g)$-réalisable: $f(e) = f'(e) \leq x'(e) = x'_G(e) = x'(e) \leq g'(e) = g(e)\ \forall e \in A$,
4. $m(v) = f'(wv) \leq x'(wv) \leq g'(wv) = m(v)\ \forall v \in V$.
5. $m$-flot : Puisque $x'$ est une circulation,
   $d^+_{(G,x'_G)}(v) - d^-_{(G,x'_G)}(v) = d^+_{(G',x')}(v) - (d^-_{(G',x')}(v) - x'(wv)) = x'(wv) = m(v)$.




$(f'(e), g'(e))$




$(f(e), g(e))$

# Exercice 4.1

## Énoncé

Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté, $c$ un vecteur sur les arcs. Montrer que

(a) $d_c^+(X) + d_c^+(Y) = d_c^+(X \cap Y) + d_c^+(X \cup Y) + d_c(X, Y)\ \forall X, Y \subset V$.

(b) Si $X$ et $Y$ sont deux $(s, t)$-coupes de capacité minimum, alors $X \cap Y$ et $X \cup Y$ le sont aussi.

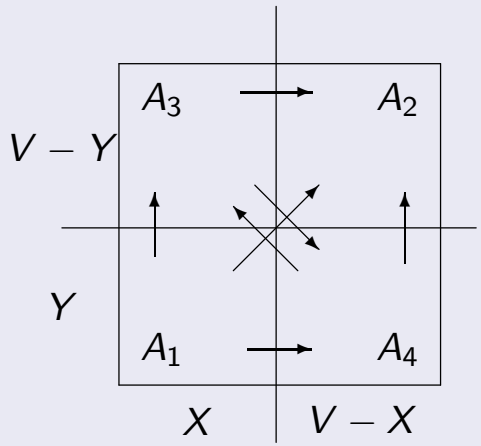
## Solution de (a)

$A_1 := X \cap Y$, $A_2 := V \setminus (X \cup Y)$, $A_3 := X \setminus Y$, $A_4 := Y \setminus X$.

$c_{ij} := \sum_{u \in A_i, v \in A_j, uv \in A} c(uv)$.

$$
\begin{aligned}
d_c^+(X) &= c_{12} + c_{14} + c_{32} + c_{34} \\
d_c^+(Y) &= c_{12} + c_{13} + c_{42} + c_{43} \\
d_c^+(X \cap Y) &= c_{12} + c_{13} + c_{14} \\
d_c^+(X \cup Y) &= c_{12} + c_{32} + c_{42} \\
d_c(X, Y) &= c_{34} + c_{43}
\end{aligned}
$$

d'où vient l'égalité (a).



# Exercice 4.1

## Énoncé

Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté, $c$ un vecteur sur les arcs. Montrer que

(a) $d_c^+(X) + d_c^+(Y) = d_c^+(X \cap Y) + d_c^+(X \cup Y) + d_c(X, Y)\ \forall X, Y \subset V$.

(b) Si $X$ et $Y$ sont deux $(s, t)$-coupes de capacité minimum, alors $X \cap Y$ et $X \cup Y$ le sont aussi.

## Solution de (b)

1. Puisque $X$ et $Y$ sont des $(s, t)$-coupes de capacité min,
2. $d_c^+(X) = \min$ et $d_c^+(Y) = \min$.
3. Puisque $X \cap Y$ et $X \cup Y$ sont des $(s, t)$-coupes,
4. $d_c^+(X \cap Y) \geq \min$ et $d_c^+(X \cup Y) \geq \min$.
5. $\min + \min = d_c^+(X) + d_c^+(Y) = d_c^+(X \cap Y) + d_c^+(X \cup Y) + d_c(X, Y)$ $\geq \min + \min + 0$ par (2), (a) et (4).
6. on a donc égalité partout : $d_c^+(X \cap Y) = \min$ et $d_c^+(X \cup Y) = \min$.