Optimisation Combinatoire 2A
Applications des plus courts chemins

Zoltán Szigeti

Ensimag
INP Grenoble

Applications des plus courts chemins

Problème du sac à dos

1. Etant donnés
   1. un sac à dos de volume K et
   2. des objets O_i de volume c_i et d'utilité u_i $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$,
2. il faut choisir quelques uns des objets de telle sorte que
   1. la somme de leurs volumes soit inférieure ou égale à K et
   2. que la somme de leurs utilités soit maximum.

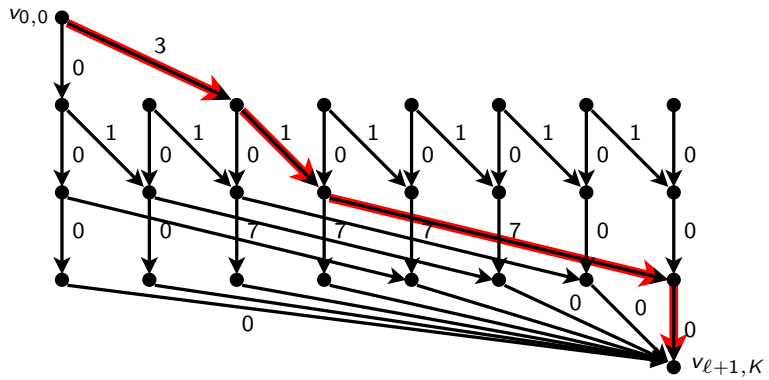
Objets	sac	O_1	O_2	O_3
Volumes	7	2	1	4
Valeurs	?	3	1	7

Problème du sac à dos

Modélisation

1. $(D := (V, A), c)$ où
   1. $V := \{v_{i,j} : 1 \leq i \leq \ell,\ 0 \leq j \leq K\} \cup \{v_{0,0}, v_{\ell+1,K}\}$ et
   2. $A := \cup_{i=0}^{\ell} A_i \cup_{i=0}^{\ell-1} A'_i$ où
      1. $A_0 := v_{0,0}v_{1,0}$, $A_i := \{v_{i,j}v_{i+1,j} : 0 \leq j \leq K\}$ $(1 \leq i \leq \ell - 1)$,
      2. $A'_0 := v_{0,0}v_{1,c_1}$, $A'_i := \{v_{i,j}v_{i+1,j+c_{i+1}} : 0 \leq j \leq K - c_{i+1}\}$ $(1 \leq i \leq \ell - 1)$,
      3. $A_\ell := \{v_{\ell,j}v_{\ell+1,K} : 0 \leq j \leq K\}$.
   3. $c(e) := \begin{cases} 0 & \text{si } e \in \cup_{i=0}^{\ell} A_i \\ u_{i+1} & \text{si } e \in A'_i. \end{cases}$
2. On cherche un plus long chemin de $s := v_{0,0}$ à $t := v_{\ell+1,K}$.

Objets	sac	O_1	O_2	O_3
Volumes	7	2	1	4
Valeurs	?	3	1	7



Exercice 2.9

Énoncé

(a) Montrer que D est sans circuit.

(b) Montrer qu'il existe une bijection entre les solutions du problème du sac à dos et les (s, t)-chemins dans D.

(c) Montrer qu'un (s, t)-chemin de coût maximum dans (D, c) donne la solution optimale du problème du sac à dos.

(d) Résoudre le problème du sac à dos où le volume du sac est 12 et il y a quatre objets A, B, C, D :

Objets	A	B	C	D
Volumes	2	3	5	7
Valeurs	3	4	8	9

Exercice 2.9

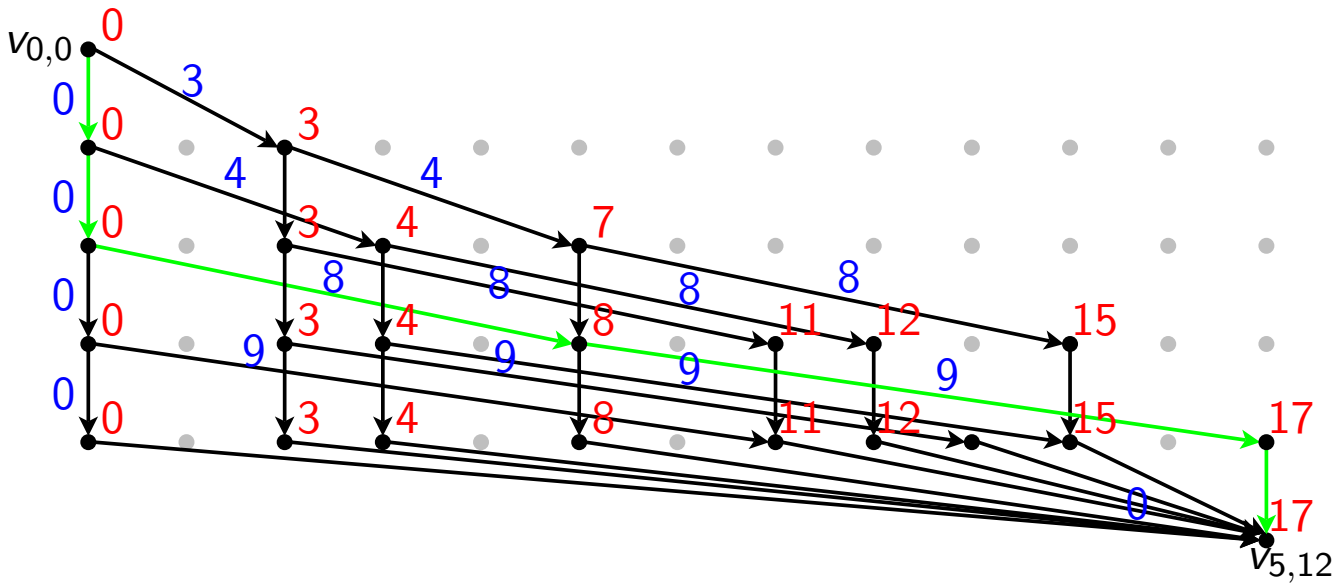
Solution

(a) $v_{0,0}, v_{1,0}, v_{1,1}, \ldots v_{1,K}, v_{2,0}, v_{2,1}, \ldots v_{2,K}, \ldots, v_{\ell,0}, v_{\ell,1}, \ldots v_{\ell,K}, v_{\ell+1,K}$ est un ordre topologique, D est donc, par l'Exercice 1.12, sans circuit.

(b) Évident par construction.

(c) Évident par (b).

(d) Voir Figure:



Exercice 2.11

Énoncé : Allocation des contrôles sur une chaîne de production

- Une chaîne de production est une liste de n étapes de production.
- Chaque étape consiste en
  - une phase de fabrication (de coût unitaire p_i)
  - éventuellement suivie d'une séance de contrôle (où on contrôle soit tous les objets soit aucun).
- La i-ième phase de fabrication peut introduire des défauts dans chaque objet avec la probabilité α_i.
- On veut qu'à la fin tous les objets soient sans défaut.
- Le problème se pose d'optimiser la position des contrôles sachant que le coût unitaire du contrôle à la phase i dépend de la position j du contrôle précédent, et est noté $c(j, i)$.

Exercice 2.11

Solution

1. C'est quoi le coût total si on ne contrôle qu'à la fin ?

$$c(0,n) + \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

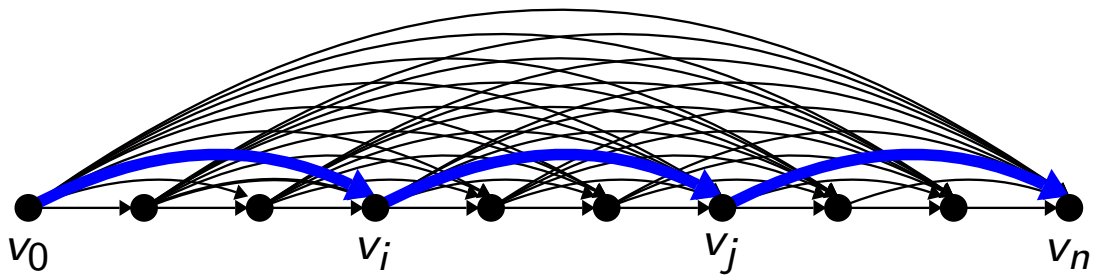
2. C'est quoi le coût total si on contrôle partout ?

Phase 1: $c(0,1) + p_1$
Phase 2: $+(1-\alpha_1)(c(1,2)+p_2)$
Phase 3: $+(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(c(2,3)+p_3)$
Phases : $+\cdots+$
Phase n: $+\prod_{i=1}^{n-1}(1-\alpha_i)(c(n-1,n)+p_n)$.

3. et entre phases i et j si on ne contrôle qu'aux phases i et j ?

$$\text{coût}(i,j) = \prod_{k=1}^{i}(1-\alpha_k)\left(c(i,j) + \sum_{k=i+1}^{j} p_k\right).$$

Exercice 2.11

Modélisation

1. $(D := (V, A), \text{coût})$ où
   1. $V := \{v_i : 0 \leq i \leq n\}$ et
   2. $A := \{v_i v_j : 0 \leq i < j \leq n\}$
2. $\text{coût}(v_i v_j) := \prod_{k=1}^{i} (1 - \alpha_k) \left(c(i,j) + \sum_{k=i+1}^{j} p_k \right)$
3. Un plus court (v_0, v_n)-chemin dans $(D, \text{coût})$ donne une solution optimale du problème.