2A – Optimisation Combinatoire

Couplage de cardinal maximum

Étant donnés un graphe G et un couplage M de G, un arbre F dans G est **M-alterné** si

(i) un sommet r de F est M-insaturé (r est la racine de F),
(ii) dans F, chaque sommet de la distance impaire de r est de degré 2,
(iii) la chaîne élémentaire unique dans F de r à chaque sommet v de F est M-alternée.

Un sommet de F est dit **impair/pair** si sa distance de r dans F est impair/pair. Les ensembles des sommets impairs/pairs de F sont notés par A_F et D_F. Si u et v sont deux sommets pairs de F alors le cycle impair unique de $F + uv$ s'appelle **fleur**. Si G' est obtenu à partir de G en contractant C en un **pseudo-sommet** w_C alors l'opération inverse est notée par $\div$, donc si $G' = G/C$ alors $G = G' \div C$.

Exercice 8.1. — (**Justification de l'algorithme de couplage parfait**)

(a) Montrer que F_k est toujours un arbre alterné à l'Etape 3.
(b) Montrer que pour tout k, $|D_{F_k}| = |A_{F_k}| + 1$.
(c) Montrer que chaque pseudo-sommet est un sommet pair du l'arbre alterné.
(d) Montrer que si l'algorithme s'arrête à l'Etape 3 alors
  (i) les sommets dans D_{F_k} sont isolés dans $G_j - A_{F_k}$,
  (ii) chaque sommet de D_{F_k} correspond à un ensemble de sommets de G de cardinal impair,
  (iii) X viole la condition de Tutte.
(e) Montrer qu'à l'Etape 7 on a augmenté la taille du couplage de G.
(f) Montrer que l'algorithme s'arrête en temps polynomial.
(g) En déduire le théorème de Tutte.

Exercice 8.2. — (**Justification de l'algorithme de couplage de cardinal maximum**)

Algorithme de couplage de cardinal maximum (Edmonds) :
Entrée : $G = (V, E)$ un graphe.
Sortie : Un couplage de G de cardinal maximum.
Etape 1. *Construction des arbres alternés.*
  Tant qu'il existe un sommet insaturé faire
    Exécuter l'algorithme de couplage parfait avec la modification suivante :
    avant s'arrêter à l'Etape 3 effacer les sommets de l'arbre alterné.
Etape 2. *Décontraction des fleurs contractées en ordre inverse.*
  Comme dans l'algorithme de couplage parfait en ajoutant que
    si $w_{C_{j-1}} = r_{F_k}$ alors soit $z_{j-1} := r_{F_{k-1}}$.
Etape 3. Arrêter.

Quand l'algorithme s'arrête on a t arbres alternés $F_1, \ldots, F_t$ qui sont sommets disjoints et un couplage parfait M' du reste du graphe. Chaque F_i correspond à un sous-graphe G_i de G.

(a) Montrer que G_i possède un couplage M_i tel qu'il existe un seul sommet M_i-insaturé dans G_i.
(b) Montrer que $c_o(G - X) - |X| = t$ où $X = \bigcup_{i=1}^{t} A_{F_i}$.
(c) Montrer que $M = M' \cup \bigcup_{i=1}^{t} M_i$ est un couplage de cardinal maximum de G.
(d) Montrer que l'algorithme s'arrête en temps polynomial.
(e) En déduire la formule de Berge-Tutte.

ALGORITHME DE COUPLAGE PARFAIT (EDMONDS) :
ENTRÉE : $G = (V, E)$ un graphe.
SORTIE : Un couplage parfait M de G ou un ensemble X qui viole la condition de Tutte.

Etape 0. *Initialisation.*
$M_0 := \emptyset, i := 0,$
$G_0 := G, j := 0.$

Etape 1. *Condition d'arrêt.*
Si tous les sommets de G sont M_i-saturés alors arrêter avec M_i.

Etape 2. *Commencement de la construction d'un arbre alterné.*
Soit r un sommet M_i-insaturé.
Soit $F_0 := (r, \emptyset), k := 0.$

Etape 3. *Condition d'arrêt.*
Si chaque arête de G_j sortant d'un sommet F_k-pair entre dans un sommet F_k-impair alors arrêter avec $X :=$ l'ensemble des sommets F_k-impairs.

Etape 4. *Choix de l'arête $u_k v_k$.*
Soit $u_k v_k$ une arête de G_j telle que u_k est un sommet F_k-pair et v_k n'est pas un sommet F_k-impair.

Etape 5. *Augmentation de l'arbre alterné.*
Si v_k n'est pas dans F_k et il existe une arête $v_k w_k$ dans M_i alors faire
$F_{k+1} := F_k + u_k v_k + v_k w_k, k := k + 1,$
Aller à l'Etape 3.

Etape 6. *Contraction d'une fleur.*
Si v_k est dans F_k alors faire
Soit C_j le cycle unique dans $F_k + u_k v_k$,
$M_{i+1} := M_i \setminus E(C_j), i := i + 1,$
$G_{j+1} := G_j / C_j, j := j + 1,$
$F_{k+1} := F_k / C_j, k := k + 1,$
Aller à l'Etape 3.

Etape 7. *Augmentation du couplage dans G.*
Si v_k n'est pas dans F_k et v_k est M_i-insaturé alors faire
Construction d'une chaîne M_i-augmentante.
Soit Q_i la chaîne élémentaire unique dans F_k de r à u_k,
$P_i := Q_i + u_k v_k.$
Augmentation du couplage dans G_j.
$M_{i+1} := (M_i \setminus E(P_i)) \cup (E(P_i) \setminus M_i), i := i + 1.$
Décontraction des fleurs contractées en ordre inverse.
Si les fleurs contractées sont $C_0, \ldots, C_{j-1}$ alors
Tant que $j \neq 0$ faire
Soit e_{j-1} l'arête du couplage M_i incidente à $w_{C_{j-1}}$,
$G_{j-1} := G_j \div C_{j-1},$
Soit z_{j-1} le sommet de C_{j-1} qui est incident à e_{j-1},
$M_{i+1} :=$ $M_i \cup$ le couplage parfait de $C_{j-1} - z_{j-1}$.
$i := i + 1, j := j - 1.$
Aller à l'Etape 1.