Optimisation Combinatoire 2A
Flots de coût minimum 2

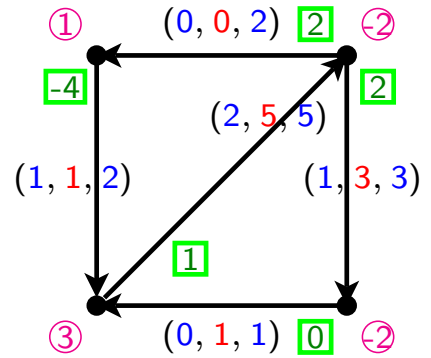
Zoltán Szigeti

Ensimag
Grenoble INP

Définition des m-flots

Définition

1. Étant donnés
   1. un graphe orienté $G = (V, A)$,
   2. une fonction m sur les sommets de G,
   3. deux capacités f et g sur chaque arc e de G avec $f(e) \leq g(e)\ \forall e \in A$,
   4. un coût c sur les arcs de G,
2. une fonction x sur les arcs est
   1. un m-flot si la m-**conservation du flot** est vérifiée : $d_x^+(v) - d_x^-(v) = m(v) \quad \forall v \in V$.
   2. réalisable si la **contrainte de capacités** est vérifiée : $f(e) \leq x(e) \leq g(e) \quad \forall e \in A$.



$(f(e), x(e), g(e))$

$m(v)$ $\quad$ $c(e)$

Problème : Flot de coût minimum

Etant donnés (G, m, f, g, c), trouver dans G un m-flot (f, g)-réalisable de c-coût $(\sum_{e \in A} c(e)x(e))$ minimum.

m-flot

Cas spéciaux du problème de m-flot de coût minimum

1. Problème de plus courts chemins,
2. Problème de flot réalisable de valeur k,
3. Problème de circulation réalisable,
4. Problème de transport.

Théorème (Existence d'un m-flot)

Il existe un m-flot (f, g)-réalisable dans G $\iff$

$$m(V) = 0,$$

$$d_g^+(Z) - d_f^-(Z) \geq m(Z) \; \forall Z \subseteq V.$$

On supposera que $m(V) = 0$.

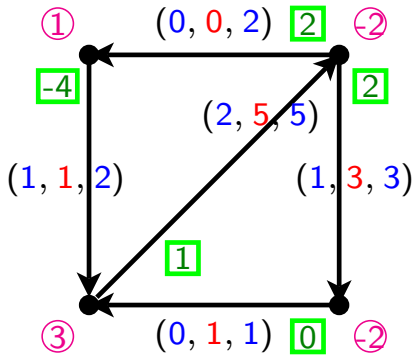
m-flot avec $f \equiv 0$

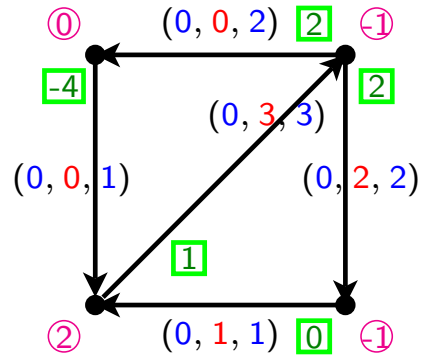
Transformation 1 : $f^2(e) = 0$ $\forall e \in A$.

$$
\begin{aligned}
(f^2(e), g^2(e)) &:= (0, g^1(e) - f^1(e)) && \forall e \in A, \\
m^2(v) &:= m^1(v) - (d^+_{f^1}(v) - d^-_{f^1}(v)) && \forall v \in V.
\end{aligned}
$$

Lemme

x est un m^1-flot (f^1, g^1)-réalisable de c^1-coût minimum $\Longleftrightarrow$
$x - f^1$ est un m^2-flot (f^2, g^2)-réalisable de c^2-coût minimum.





Programmes Linéaires

Primal				Dual			
$\sum_{vu \in A} x(vu) - \sum_{uv \in A} x(uv)$	$=$	$m(v)$	$\forall v \in V$	$p(e)$	$\geq$	$-c^{\pi}(e)$	$\forall e \in A$
$-x(e)$	$\geq$	$-g(e)$	$\forall e \in A$				
$x(e)$	$\geq$	0	$\forall e \in A$	$p(e)$	$\geq$	0	$\forall e \in A$
$c^T x$	$=$	$w(\min)$		$\pi^T m - p^T g$	$=$	$z(\max)$	

Les conditions des écarts complémentaires

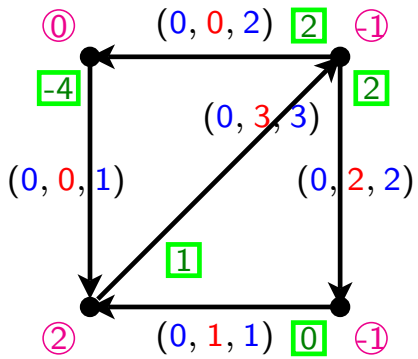
$$x(e) > 0 \implies p(e) = -c^{\pi}(e),$$
$$x(e) < g(e) \implies p(e) = 0.$$

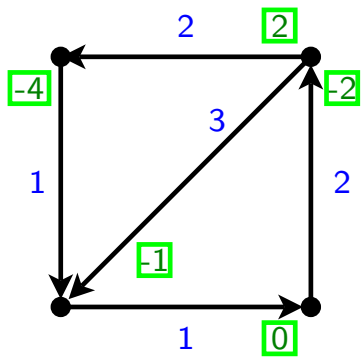
Réseau auxiliaire

Construction

(G_x, g_x, c_x) associé à (G, m, g, c, x) :

1. $G_x = (V, A_x^1 \cup A_x^2)$ où
   1. $A_x^1 := \{uv \in A : x(uv) < g(uv)\}$ et
   2. $A_x^2 := \{vu : uv \in A, x(uv) > 0\}$,
2. $g_x(uv) := \begin{cases} g(uv) - x(uv) & \text{si } uv \in A_x^1, \\ x(vu) & \text{si } uv \in A_x^2. \end{cases}$
3. $c_x(uv) := \begin{cases} c(uv) & \text{si } uv \in A_x^1, \\ -c(vu) & \text{si } uv \in A_x^2. \end{cases}$





Conditions d'optimalité

Théorème

Étant donné un m-flot g-réalisable x pour (G, m, g, c), les conditions suivantes sont équivalentes :

1. x est un m-flot g-réalisable de c-coût minimum,
2. (G_x, c_x) est sans circuit absorbant,
3. (G_x, c_x) admet un potentiel π',
4. il existe une fonction π sur V telle que $c_x^\pi(uv) \geq 0 \ \forall \ uv \in A(G_x)$,
5. il existe une fonction π sur V telle que $\forall \ e \in A(G)$:

$$\begin{aligned} x(e) > \ 0 \quad &\Longrightarrow \quad c^\pi(e) \leq 0, \\ x(e) < g(e) \quad &\Longrightarrow \quad c^\pi(e) \geq 0. \end{aligned}$$

Démonstration

(1) $\Longrightarrow$ (2)

1. Par l'absurde, s'il existe un circuit absorbant C dans (G_x, c_x),
2. Soit $x'(uv) := \begin{cases} x(uv) + \varepsilon & \text{si } uv \in A(C) \cap A_x^1 \\ x(uv) - \varepsilon & \text{si } vu \in A(C) \cap A_x^2 \\ x(uv) & \text{sinon.} \end{cases}$ où
   $\varepsilon := \min\{g_x(uv) : uv \in A(C)\}$.
3. x' est un m-flot g-réalisable (pareil comme pour les flots).
4. $$c^T x' = c^T x + \sum_{uv \in A(C) \cap A_x^1} c(uv)\varepsilon + \sum_{vu \in A(C) \cap A_x^2} c(uv)(-\varepsilon)$$
   $$= c^T x + \sum_{uv \in A(C)} c_x(uv)\varepsilon = c^T x + c_x(C)\varepsilon.$$
5. Puisque C est un circuit de c_x-coût négatif et $\varepsilon > 0$, on a $c^T x' = c^T x + c_x(C)\varepsilon < c^T x$, contradiction.

Démonstration

Continuation

(2) $\Longrightarrow$ (3) Par la caractérisation des réseaux sans circuit absorbant.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Soit π' un potentiel dans $(G_x, c_x) \Longrightarrow \forall uv \in A(G_x)$:

- $c_x(uv) \geq \pi'(v) - \pi'(u) \Longrightarrow$
- $c_x(uv) + (-\pi'(v)) - (-\pi'(u)) \geq 0 \Longrightarrow$
- $c_x^{\pi}(uv) \geq 0$ pour $\pi := -\pi'$.

(4) $\Longrightarrow$ (5)

1. Si $x(uv) > 0$, alors $vu \in A_x^2$, donc, par (4),
   $c^{\pi}(uv) = c(uv) + \pi(v) - \pi(u) = -(c_x(vu) + \pi(u) - \pi(v)) = -c_x^{\pi}(vu) \leq 0.$
2. Si $x(uv) < g(uv)$, alors $uv \in A_x^1$, donc, par (4),
   $c^{\pi}(uv) = c(uv) + \pi(v) - \pi(u) = c_x(uv) + \pi(v) - \pi(u) = c_x^{\pi}(uv) \geq 0.$

Démonstration

La fin

(5) $\Longrightarrow$ (1) Soit $p(e) = \max\{-c^\pi(e), 0\}\ \forall e \in A$.

1. (π, p) est une solution réalisable du dual :

$$\begin{aligned} p(e) &\geq -c^\pi(e) \quad \forall e \in A, \\ p(e) &\geq 0 \quad \forall e \in A, \\ \pi^T m - p^T g &= z(\max). \end{aligned}$$

2. Par (5), $x(e) > 0 \Longrightarrow c^\pi(e) \leq 0 \Longrightarrow p(e) = -c^\pi(e)$,
3. Par (5), $x(e) < g(e) \Longrightarrow c^\pi(e) \geq 0 \Longrightarrow p(e) = 0$,

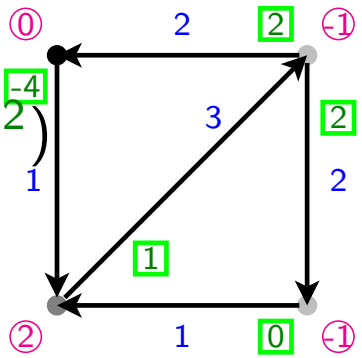
qui sont les conditions des écarts complémentaires pour l'optimalité de x.

Flots

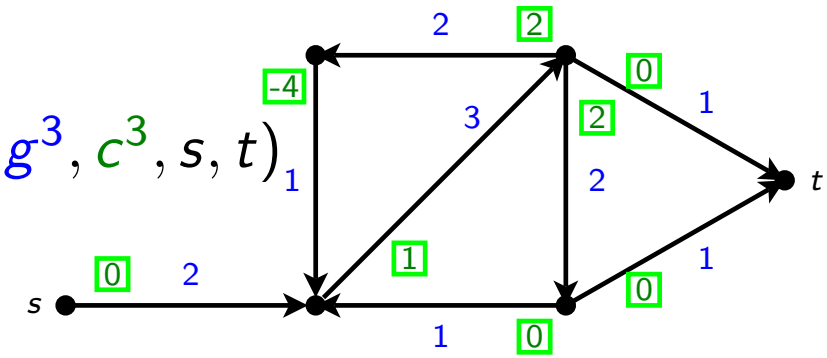
Transformation 2 : $m^3(v) = 0 \ \forall v \in V^3 \setminus \{s,t\}$ où $s,t \in V^3$.

1. $S := \{v : m^2(v) > 0\}$, $T := \{v : m^2(v) < 0\}$.
2. $(G^3 := (V^3, A^3), g^3, c^3)$ où
   $V^3 := V^2 \cup \{s,t\}$ et $A^3 := A^2 \cup \{sv : v \in S\} \cup \{ut : u \in T\}$.
3. $$g^3(uv) := \begin{cases} g^2(uv) & \text{si } uv \in A^2, \\ m^2(v) & \text{si } u = s, v \in S, \\ -m^2(u) & \text{si } u \in T, v = t. \end{cases}$$
4. $$c^3(e) := \begin{cases} c^2(e) & \text{si } e \in A^2, \\ 0 & \text{si } e \in A^3 \setminus A^2. \end{cases}$$

(G^2, m^2, g^2, c^2)



(G^3, g^3, c^3, s, t)



Flots

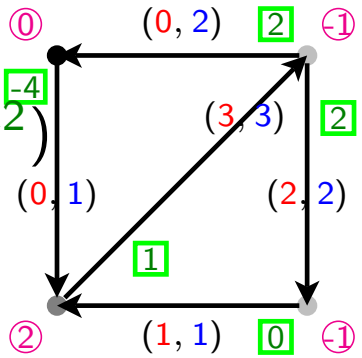
Lemme

x est un m^2-flot g^2-réalisable $\iff$

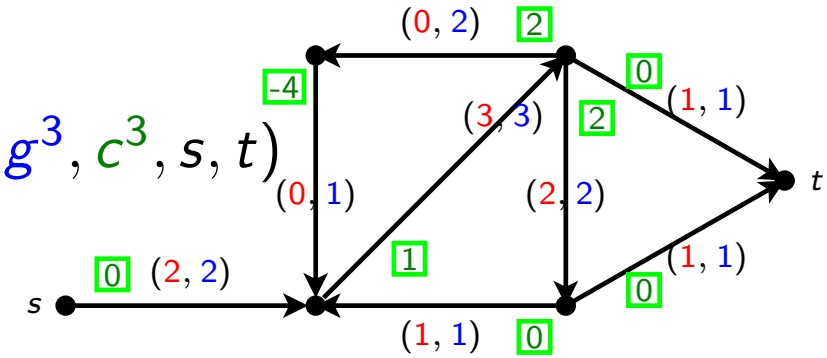
x est un (S, T)-flot g^2-réalisable de valeur $m^2(S)(= -m^2(T))$ $\iff$

x' est un (s, t)-flot g^3-réalisable de valeur $m^2(S)$ tel que $c^3(x') = c^2(x)$.

(G^2, m^2, g^2, c^2)



(G^3, g^3, c^3, s, t)



Algorithme pour trouver un flot réalisable de valeur k de coût minimum

Algorithme (Suppression des circuits absorbants)

Entrée : $(G=(V,A), g, c)$ avec $g \geq 0$, $k \geq 0$ et $s, t \in V$.

Sortie : Soit un (s,t)-flot g-réalisable x de valeur k de c-coût minimum, soit une (s,t)-coupe Z de g-capacité inférieure à k.

1. Chercher un (s,t)-flot g-réalisable x de valeur k (par flots).
   - S'il n'y a pas alors arrêter avec une (s,t)-coupe Z de g-capacité inférieure à k.
2. Chercher un circuit absorbant C dans (G_x, c_x) (par plus courts chemins).
   - S'il n'y a pas alors arrêter avec le (s,t)-flot g-réalisable x de valeur k de c-coût minimum.
   - Sinon, changer le flot sur C et Aller à 2.

Algorithme (Suppression des circuits absorbants)

Etape 1: *Recherche d'un (s,t)-flot g-réalisable de valeur k dans (G,g).*

$G' := (V \cup s', A \cup s's), g'(e) := g(e)\ \forall e \in A, g'(s's) := k.$

Appliquer l'algorithme d'Edmonds-Karp à (G', g', s', t) pour obtenir dans G'

un (s',t)-flot g'-réalisable x' de valeur maximum et

une (s',t)-coupe $Z \cup s'$ de g'-capacité minimum.

Si $cap_{g'}(Z \cup s') < k$ alors arrêter avec Z.

Sinon $x := x'_G$.

Etape 2: *Recherche d'un circuit absorbant dans (G_x, c_x).*

$G'' := (V \cup s'', A(G_x) \cup \{s''v : v \in V\})$,

$c''(e) = c_x(e)\ \forall e \in A(G_x), c''(s''v) = 0\ \forall v \in V.$

Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig à (G'', s'', c'').

S'il s'arrête avec les plus courts chemins de s'' alors arrêter avec x.

Etape 3: *Changement du flot.*

S'il s'arrête avec un circuit absorbant C alors

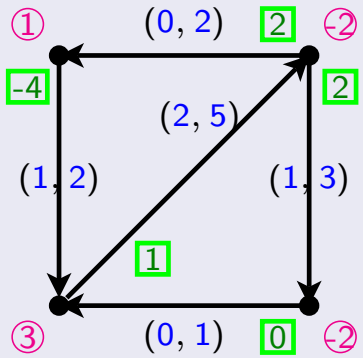
$\varepsilon := \min\{g_x(uv) : uv \in A(C)\}$,

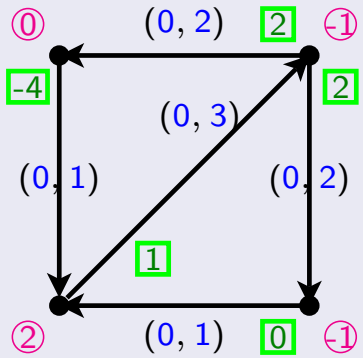
$$x'(uv) := \begin{cases} x(uv) + \varepsilon & \text{si } uv \in A(C) \cap A^1_x \\ x(uv) - \varepsilon & \text{si } vu \in A(C) \cap A^2_x \\ x(uv) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Aller à l'Etape 2.

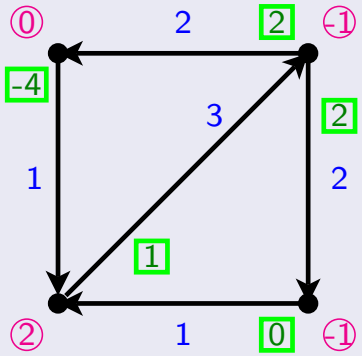
Exécution de l'algorithme

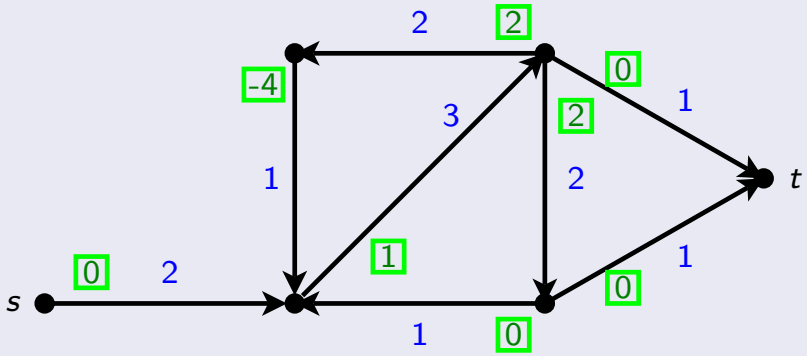
Transformation 1: $(G^2 = G^1, m^2 = m^1 - (d^+_{f^1} - d^-_{f^1}), f^2 := 0, g^2 = g^1 - f^1, c^2 = c^1)$





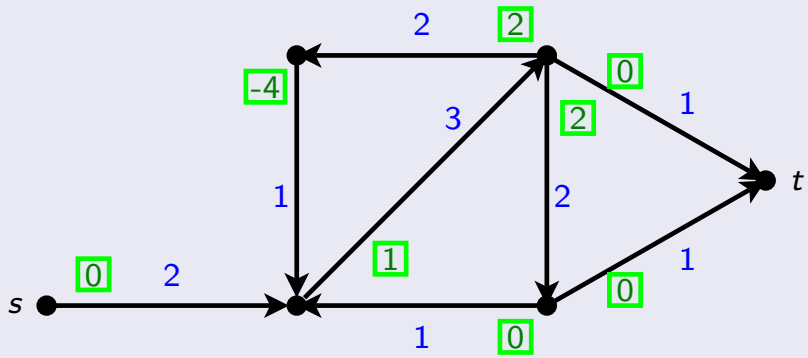
Transformation 2: $(G^3, g^3, c^3), s, t$

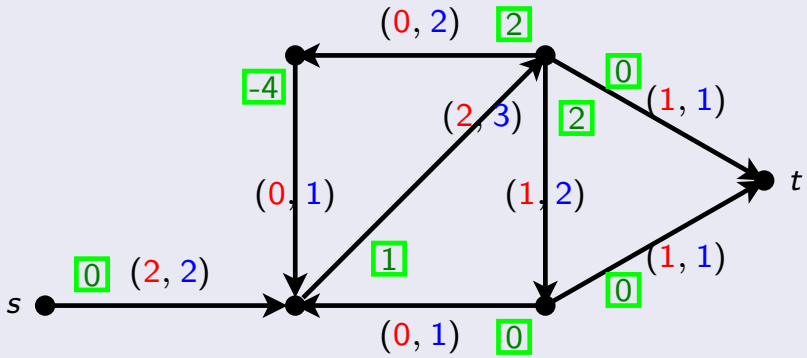




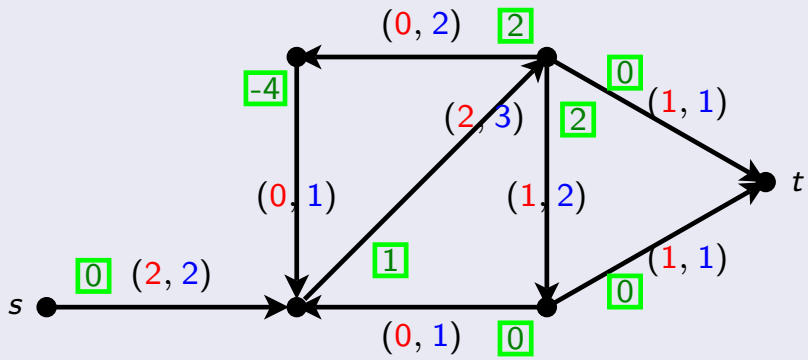
Exécution de l'algorithme

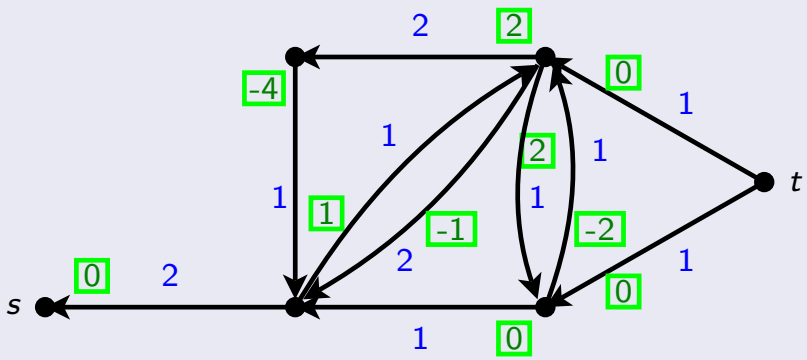
Un flot réalisable x de valeur 2 dans (G^3, g^3)





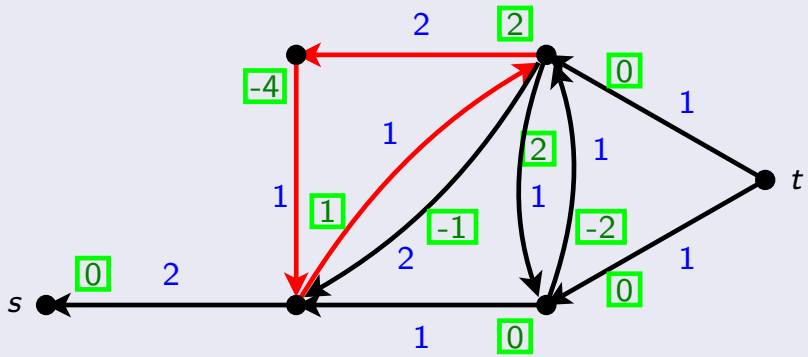
Graphe auxiliaire (G^3_x, g^3_x, c^3_x)

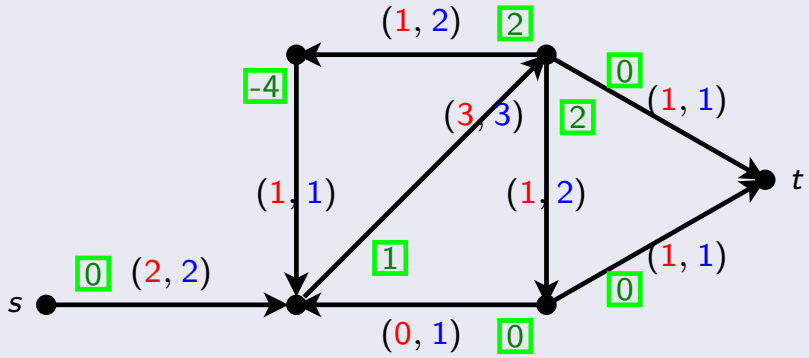




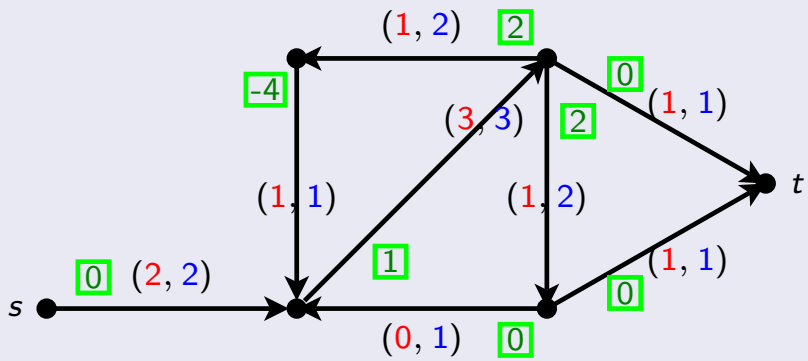
Exécution de l'algorithme

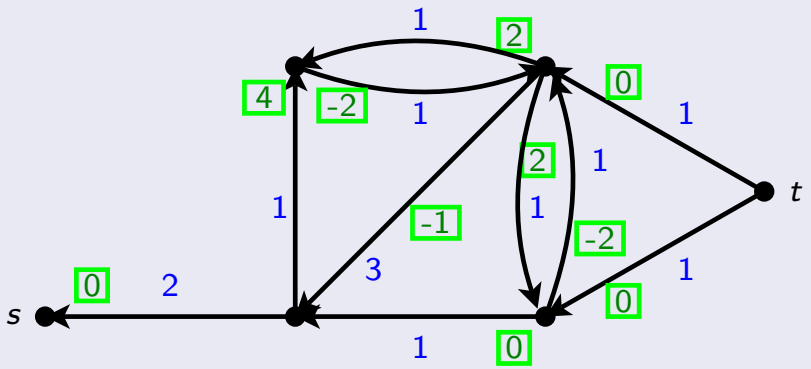
Circuit absorbant C de (G_x^3, c_x^3) et le nouveau flot g^3-réalisable x' de valeur 2 dans G^3





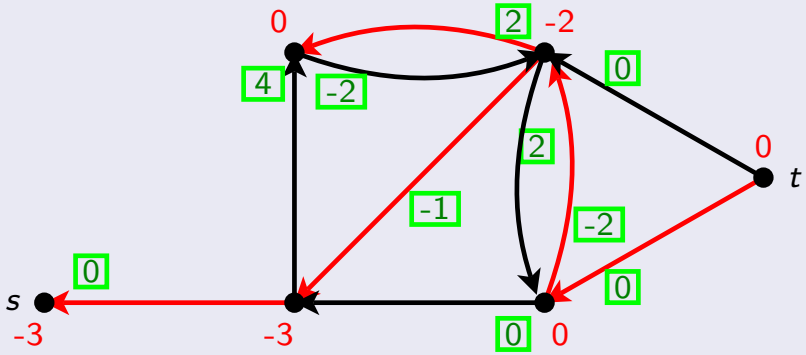
Graphe auxiliaire $(G_{x'}^3, g_{x'}^3, c_{x'}^3)$

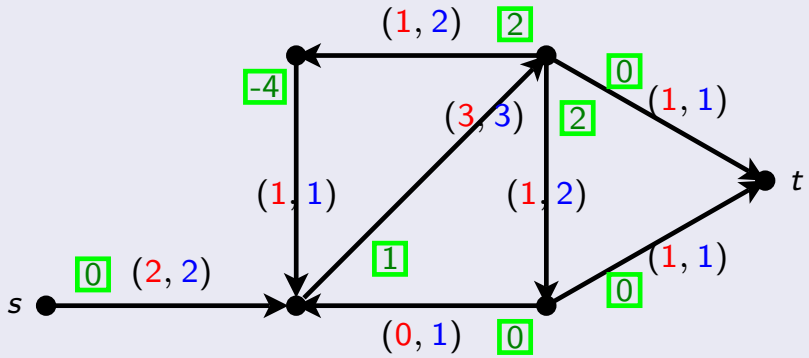




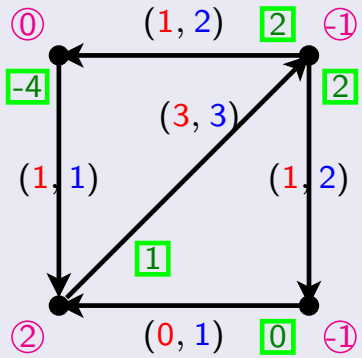
Exécution de l'algorithme

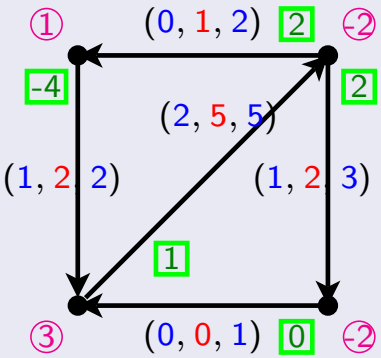
Potentiel de $(G^3_{x'}, c^3_{x'})$ et donc x' est un (s,t)-flot g^3-réalisable de valeur 2 de c^3-coût minimum dans G^3





$x'_G + f^1$ est un m^1-flot (f^1, g^1)-réalisable de c^1-coût minimum





Flot entier

Flot entier

Si les fonctions m, f, g sont entières alors il existe un m-flot (f, g)-réalisable de c-coût minimum entier.

Démonstration

L'algorithme fournit automatiquement un tel flot :

1. $m^1 := m, f^1 := f$, et $g^1 := g$ sont entières.
2. Transformation 1 : m^2 et g^2 sont entières.
3. Transformation 2 : g^3 est entière.
4. Edmonds-Karp : flot est entier.
5. Changement du flot : nouveau flot est entier.
6. m-flot (f, g)-réalisable : $x^*_G + f$ est entier.

Application

Reconstruire le ventricule gauche du coeur à partir de radiographies

- Pour diagnostiquer une possible maladie de coeur d'un patient, on doit voir la forme 3-dimensionnelle du ventricule gauche du coeur.
- Évidemment, le problème se réduit à plusieurs problèmes 2-dimension.
- En prenant les rayons X, on ne peut pas avoir directement l'image 2-dimensionnelle ; on aura plutôt deux projections 1-dimensionnelles de la densité de la région sur les deux axes.
- Le problème revient donc à construire une matrice binaire dont la somme de chaque ligne et de chaque colonne est connue.
- On suppose que pour chaque pixel de l'image, on connait une probabilité p_{ij} que le pixel appartient à la région cherchée.
- Modéliser ce problème par un problème de flots de coût minimum.

Application

Reconstruire une matrice binaire

- Pour une matrice binaire A, la somme ℓ_i (respectivement c_j) de chaque ligne i (et de chaque colonne j) est connue.
- On connait aussi les probabilités p_{ij} que l'élément a_{ij} est égale à 1.
- Comment trouver une telle matrice la plus probable par un problème de flots de coût minimum ?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$$

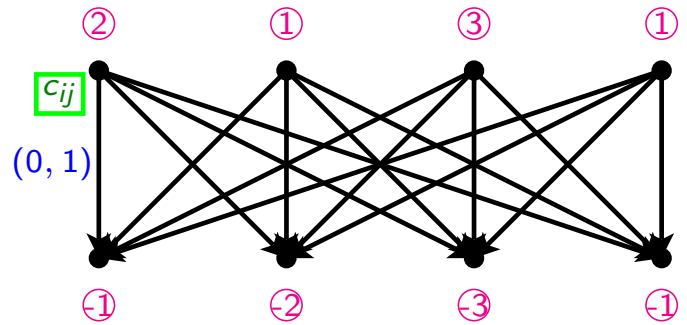
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Application

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$



$c_{ij} = -log(p_{ij})$

max probabilité de la matrice choisie $\Longleftrightarrow \max \prod_{x_{ij}=1} p_{ij} \Longleftrightarrow$
$\max log(\prod_{x_{ij}=1} p_{ij}) \Longleftrightarrow \max \sum_{x_{ij}=1} log(p_{ij}) \Longleftrightarrow \min \sum_{x_{ij}=1} -log(p_{ij})$
$\Longleftrightarrow \min \sum -log(p_{ij}) x_{ij} \Longleftrightarrow \min \sum c_{ij} x_{ij}$