Couplage dans les graphes

Une composante connexe K de G est dite **impaire (resp. paire)** si $|V(K)|$ est impair (resp. pair). $\boldsymbol{c_o(G)}$ est le nombre de composantes connexes impaires de G. Un sous-ensemble X de sommets de G est une **barrière** de G si $c_o(G-X) = |X|$.

Exercice 7.1. — Montrer que $|V(G)| \equiv c_o(G-X) + |X| \pmod 2 \quad \forall X \subseteq V(G)$.

Exercice 7.2. — Montrer que si un graphe G admet un couplage parfait alors

$$c_o(G-X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V(G). \tag{1}$$

Exercice 7.3. — Le but de cet exercice est de démontrer le **Théorème de Tutte :**
Un graphe G admet un couplage parfait si et seulement si la condition (1) est satisfaite.

Par l'induction sur |V(G)|. Soit G un graphe qui satisfait (1).

(a) Montrer que $|V(G)|$ est pair.
(b) Montrer que chaque sommet est une barrière.

Soit X une barrière maximale de G.

(c) Montrer que $X \neq \emptyset$.
(d) Montrer que $G - X$ n'a pas de composante connexe paire.
(e) Montrer que pour toute composante connexe impaire K de $G - X$ et pour tout sommet v de K, $K - v$ satisfait (1).
(f) Soit B_X le graphe biparti obtenu à partir de G par contractant chaque composante connexe impaire de $G - X$ et par enlevant toutes les arêtes dans $G[X]$. En utilisant le théorème de Hall montrer que B_X possède un couplage parfait.
(g) En déduire le théorème de Tutte.

Exercice 7.4. — **Théorème de Petersen** : Montrer que tout graphe 2-arête-connexe 3-régulier possède un couplage parfait.

Exercice 7.5. — Le but de cet exercice est de démontrer la **Formule de Berge-Tutte :**
Pour tout graphe $G = (V, E)$,

$$2\nu(G) = \min\{|V| - c_o(G-X) + |X| : X \subseteq V\}. \tag{2}$$

Soit $k := \max\{c_o(G-X) - |X| : X \subseteq V\}$.

(a) Montrer que $2\nu(G) \leq |V| - k$.

Soit $G' := (V', E')$ où $V' := V \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ et $E' := E \cup \{v_i u : 1 \leq i \leq k, u \in V'\}$.

(b) Montrer que G' admet un couplage parfait.
(c) En déduire que $2\nu(G) \geq |V| - k$.
(d) Conclure.

Exercice 7.6. — Le but de cet exercice est de démontrer que le Théorème de Tutte implique le Théorème de Hall.

Soit $G = (A, B; E)$ un graphe biparti tel que les conditions de Hall soient satisfaites. Soit X un ensemble de sommets de cardinal maximum tel que $c_o(G - X) - |X|$ soit maximum.

(a) Montrer que chaque composante connexe de $G - X$ est un sommet isolé.

(b) En déduire que $c_o(G - X) = |A - X| + |B - X|$ et que $\Gamma(A - X) \subseteq B \cap X$.

(c) En déduire que $c_o(G - X) - |X| = 0$.

(d) Conclure.

Exercice 7.7. — (Affectation des pilotes)

Le directeur d'une compagnie aérienne veut maximiser le nombre de vols effectués. Il a besoin de deux pilotes pour chaque vol. Malheureusement, certains pilotes ne peuvent pas voler ensemble. Le directeur connait ses pilotes, il sait donc si deux pilotes sont compatibles ou pas. Modéliser ce problème par un problème de couplage dans un graphe.

Exercice 7.8. — (Ordonnancement sur 2 machines)

Nous devons exécuter n tâches sur 2 machines identiques. Le temps d'exécution de chaque tâche est une minute. Il est connu pour chaque paire de tâches si elles peuvent être exécutées parallèlement sur les machines. On cherche le temps minimum d'exécution de toutes les tâches. Modéliser ce problème avec un problème de couplage de cardinal maximum.