Optimisation Combinatoire 2A
Flots de coût minimum

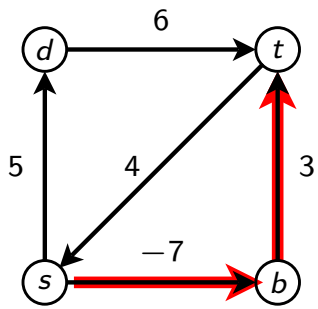
Zoltán Szigeti

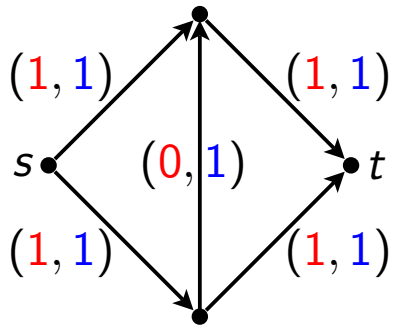
Ensimag
Grenoble INP

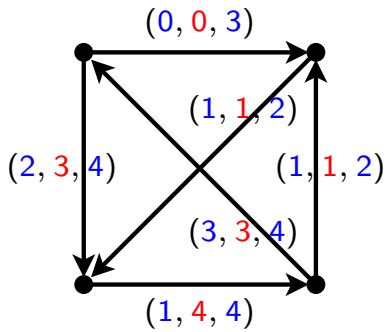
Introduction

Rappel

1. plus courts chemins : coût sur les arcs mais pas de capacité,
2. flot réalisable : capacité sur les arcs mais pas de coût,
3. circulation réalisable : capacités sur les arcs mais pas de coût,







But

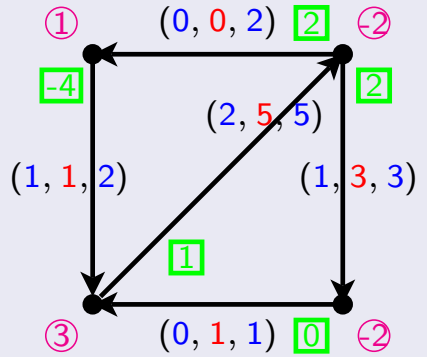
Généralisation commune de tous.

Définition des m-flots

Définition

1. Étant donnés
   1. un graphe orienté $G = (V, A)$,
   2. une fonction m sur les sommets de G,
   3. deux capacités f et g sur chaque arc e de G avec $f(e) \leq g(e)$ $\forall e \in A$,
   4. un coût c sur les arcs de G,
2. une fonction x sur les arcs est
   1. un m-flot si la m-**conservation du flot** est vérifiée : $d_x^+(v) - d_x^-(v) = m(v) \quad \forall v \in V$.
   2. réalisable si la **contrainte de capacités** est vérifiée : $f(e) \leq x(e) \leq g(e) \quad \forall e \in A$.

Exemple



$(f(e), x(e), g(e))$

$m(v)$ $\quad$ $c(e)$

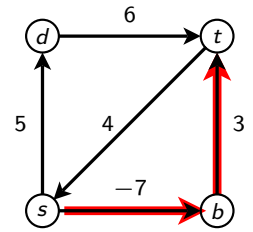
Problème : Flot de coût minimum

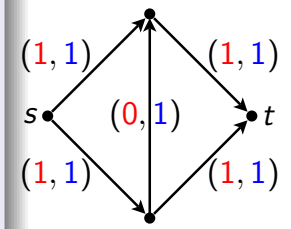
Etant donnés (G, m, f, g, c), trouver dans G un m-flot (f, g)-réalisable de c-coût $(c^T x = \sum_{e \in A} c(e)x(e))$ minimum.

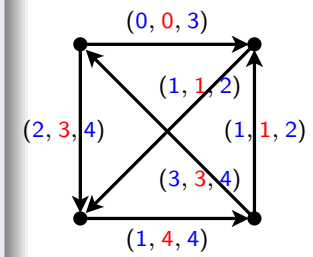
Problèmes de flot de coût minimum

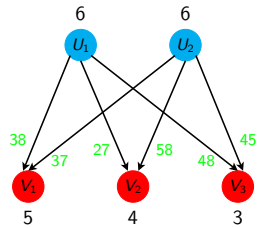
Cas spéciaux

1. Problème de plus courts chemins :
   1. $m(v) = 0\ \forall v \in V \setminus \{s, t\}$, 1 pour s et -1 pour t,
   2. $f(e) = 0, g(e) = 1\ \forall e \in A$.
   3. s'il n'y a pas de circuit de c-coût négatif alors une solution optimale entière est un (s, t)-chemin de c-coût minimum.
2. Problème de (s, t)-flot réalisable de valeur k :
   1. $m(v) = 0\ \forall v \in V \setminus \{s, t\}$, k pour s et $-k$ pour t,
   2. $f(e) = 0\ \forall e \in A$,
   3. $c(e) = 0\ \forall e \in A$.
3. Problème de circulation réalisable :
   1. $m(v) = 0\ \forall v \in V$,
   2. $c(e) = 0\ \forall e \in A$.
4. Problème de transport :
   1. $m(v) > 0$ disponibilité, $m(v) < 0$ demande,
   2. $f(e) = 0$, $g(e) = K\ \forall e \in A$ où K=max disponibilité.









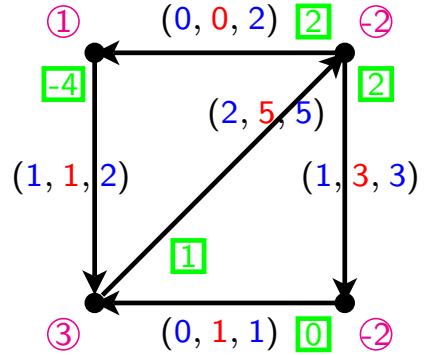
Existence d'un m-flot

Théorème

Il existe un m-flot (f, g)-réalisable dans G $\iff$

$$m(V) = 0,$$

$$d_g^+(Z) - d_f^-(Z) \geq m(Z) \ \forall Z \subseteq V.$$



$(f(e), x(e), g(e))$

$m(v)$ $\quad$ $c(e)$

On supposera que $m(V) = 0$.

m-flot

Transformation 1

On peut et on va supposer que $f(e) = 0 \ \forall e \in A$,

$$(f'(e), g'(e)) := (0, g(e) - f(e)) \ \forall e \in A,$$
$$m'(v) := m(v) - (d_f^+(v) - d_f^-(v)) \ \forall v \in V.$$

Lemme

x est un m-flot (f, g)-réalisable de c-coût minimum $\Longleftrightarrow$
$x - f$ est un m'-flot (f', g')-réalisable de c-coût minimum.

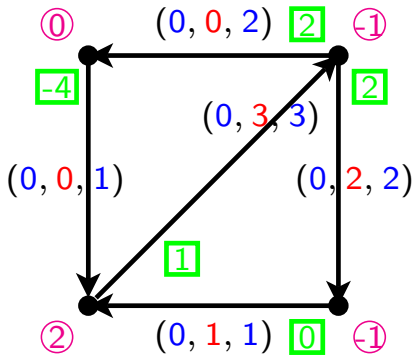
Démonstration

1. m-flot : $d_x^+(v) - d_x^-(v) - m(v) = (d_{x-f}^+(v) - d_{x-f}^-(v))$
   $+(d_f^+(v) - d_f^-(v)) - m(v) = (d_{x-f}^+(v) - d_{x-f}^-(v)) - m'(v)$,
2. (f, g)-réalisable : $f(e) \leq x(e) \leq g(e) \Longleftrightarrow$
   $f'(e) = 0 \leq (x - f)(e) \leq g(e) - f(e) = g'(e)$,
3. c-coût : $c^T x = c^T(x - f) + c^T f$ et $c^T f$ est constante.

Programme Linéaire

Le problème de trouver un m-flot $(0, g)$-réalisable de c-coût minimum dans $G = (V, A)$ peut être écrit comme un programme linéaire.

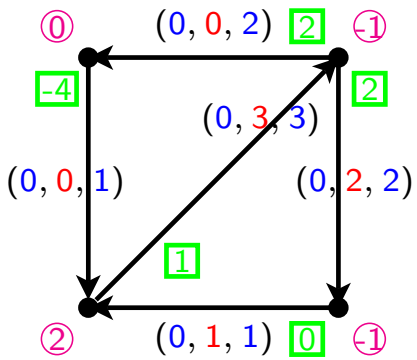
$$\begin{aligned}
\sum_{vu \in A} x(vu) - \sum_{uv \in A} x(uv) &= m(v) \quad \forall v \in V, \\
x(e) &\leq g(e) \quad \forall e \in A, \\
x(e) &\geq 0 \quad \forall e \in A, \\
\sum_{e \in A} c(e)x(e) &= w(\min).
\end{aligned}$$



Programme Linéaire

Le problème de trouver un m-flot $(0, g)$-réalisable de c-coût minimum dans $G = (V, A)$ peut être écrit comme un programme linéaire.

$$\begin{aligned}
\sum_{vu \in A} x(vu) - \sum_{uv \in A} x(uv) &= m(v) \quad \forall v \in V, \\
-x(e) &\geq -g(e) \quad \forall e \in A, \\
x(e) &\geq 0 \quad \forall e \in A, \\
\sum_{e \in A} c(e)x(e) &= w(\min).
\end{aligned}$$



Le dual du Programme Linéaire

$$
\begin{aligned}
 & & -c^{\pi}(uv) \quad \text{(coût réduit)} & \\
p(uv) & \geq & -(c(uv)+\pi(v)-\pi(u)) & \forall uv \in A, \\
p(e) & \geq & 0 & \forall e \in A, \\
\sum_{v \in V} \pi(v)m(v) - \sum_{e \in A} p(e)g(e) & = & z(\max). &
\end{aligned}
$$

Les conditions des écarts complémentaires

$$
\begin{aligned}
x(e) > 0 & \implies p(e) = -c^{\pi}(e), \\
p(e) > 0 & \implies x(e) = g(e).
\end{aligned}
$$

Le dual du Programme Linéaire

$$\begin{aligned} & & -c^{\pi}(uv) \quad \text{(coût réduit)} & \\ p(uv) & \geq & -(c(uv)+\pi(v)-\pi(u)) & \forall uv \in A, \\ p(e) & \geq & 0 & \forall e \in A, \\ \sum_{v \in V} \pi(v)m(v) - \sum_{e \in A} p(e)g(e) & = & z(\max). & \end{aligned}$$

Les conditions des écarts complémentaires

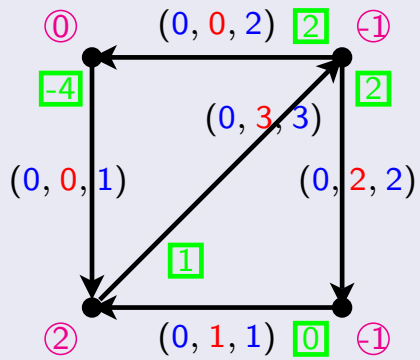
$$\begin{aligned} x(e) > 0 & \implies & p(e) = -c^{\pi}(e), \\ x(e) < g(e) & \implies & p(e) = 0. \end{aligned}$$

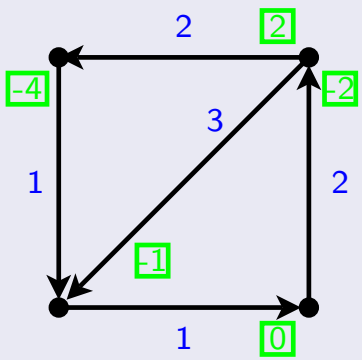
Réseau auxiliaire

Construction

(G_x, g_x, c_x) associé à (G, m, g, c, x) :

1. $G_x = (V, A_x^1 \cup A_x^2)$ où
   1. $A_x^1 := \{uv \in A : x(uv) < g(uv)\}$ et
   2. $A_x^2 := \{vu : uv \in A, x(uv) > 0\}$,
2. $g_x(uv) := \begin{cases} g(uv) - x(uv) & \text{si } uv \in A_x^1, \\ x(vu) & \text{si } uv \in A_x^2. \end{cases}$
3. $c_x(uv) := \begin{cases} c(uv) & \text{si } uv \in A_x^1, \\ -c(vu) & \text{si } uv \in A_x^2. \end{cases}$





Conditions d'optimalité

Théorème

Étant donné un m-flot g-réalisable x pour (G, m, g, c), les conditions suivantes sont équivalentes :

1. x est un m-flot g-réalisable de c-coût minimum,
2. (G_x, c_x) est sans circuit absorbant,
3. (G_x, c_x) admet un potentiel π',
4. il existe une fonction π sur V telle que $c_x^\pi(uv) \geq 0 \ \forall \ uv \in A(G_x)$,
5. il existe une fonction π sur V telle que $\forall \ e \in A(G)$:

$$\begin{aligned} x(e) > \ \ 0 &\implies c^\pi(e) \leq 0, \\ x(e) < g(e) &\implies c^\pi(e) \geq 0. \end{aligned}$$

Démonstration

(1) $\Longrightarrow$ (2)

1. Par l'absurde, s'il existe un circuit absorbant C dans (G_x, c_x),
2. Soit $x'(uv) := \begin{cases} x(uv) + \varepsilon & \text{si } uv \in A(C) \cap A_x^1 \\ x(uv) - \varepsilon & \text{si } vu \in A(C) \cap A_x^2 \\ x(uv) & \text{sinon.} \end{cases}$ où
   $\varepsilon := \min\{g_x(uv) : uv \in A(C)\}$.
3. x' est un m-flot g-réalisable (pareil comme pour les flots).
4. $$c^T x' = c^T x + \sum_{uv \in A(C) \cap A_x^1} c(uv)\varepsilon + \sum_{vu \in A(C) \cap A_x^2} c(uv)(-\varepsilon)$$
   $$= c^T x + \sum_{uv \in A(C)} c_x(uv)\varepsilon = c^T x + c_x(C)\varepsilon.$$
5. Puisque C est un circuit de c_x-coût négatif et $\varepsilon > 0$, on a $c^T x' = c^T x + c_x(C)\varepsilon < c^T x$, contradiction.

Démonstration

Continuation

(2) $\Longrightarrow$ (3) Par la caractérisation des réseaux sans circuit absorbant.

(3) $\Longrightarrow$ (4) $\forall uv \in A(G_x)$:

- $c_x(uv) \geq \pi'(v) - \pi'(u) \Longrightarrow$
- $c_x(uv) - \pi'(v) + \pi'(u) \geq 0 \Longrightarrow$
- $c_x^\pi(uv) \geq 0$ pour $\pi := -\pi'$.

(4) $\Longrightarrow$ (5)

1. Si $x(uv) > 0$, alors $vu \in A_x^2$, donc, par (4),
   $c^\pi(uv) = c(uv) + \pi(v) - \pi(u) = -(c_x(vu) + \pi(u) - \pi(v)) = -c_x^\pi(vu) \leq 0.$
2. Si $x(uv) < g(uv)$, alors $uv \in A_x^1$, donc, par (4),
   $c^\pi(uv) = c(uv) + \pi(v) - \pi(u) = c_x(uv) + \pi(v) - \pi(u) = c_x^\pi(uv) \geq 0.$