Optimisation Combinatoire 2A
Circulations TD

Zoltán Szigeti

Ensimag
Grenoble INP

Circulation

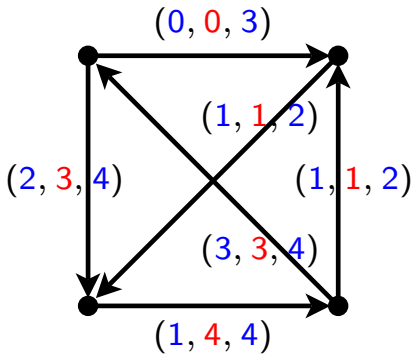
Définitions

Dans un réseau $(G = (V, A), f, g)$, une fonction x sur les arcs est

1. une circulation si elle vérifie la contrainte de conservation du flot : $d_x^+(v) = d_x^-(v)\ \forall v \in V \iff d_x^+(Z) = d_x^-(Z)\ \forall Z \subseteq V$.
2. réalisable si elle satisfait la contrainte de capacités : $f(e) \leq x(e) \leq g(e)\ \forall e \in A$.

Problème

Étant donnés un graphe orienté G, deux capacités f et g sur chaque arc e avec $f(e) \leq g(e)$, décider s'il existe une circulation réalisable.



$(f(e), x(e), g(e))$

Caractérisation

Lemme (Condition nécessaire pour avoir une circulation réalisable)

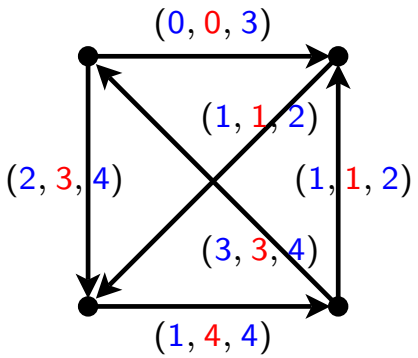
Ce qui doit entrer doit pouvoir sortir :

$$d_f^-(Z) \leq d_x^-(Z) = d_x^+(Z) \leq d_g^+(Z) \quad \forall Z \subseteq V.$$

Théorème (Hoffmann)

Il existe une circulation réalisable dans (G, f, g) si et seulement si

$$d_f^-(Z) \leq d_g^+(Z) \quad \forall Z \subseteq V.$$



$(f(e), x(e), g(e))$

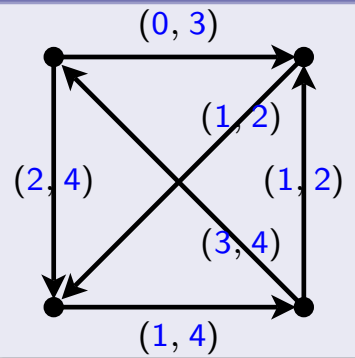
Comment trouver une circulation réalisable ?

Entrée

Étant donnés

1. $G = (V, A)$ un graphe orienté,
2. f et g deux fonctions sur les arcs telles que $f(e) \leq g(e) \qquad \forall e \in A$.

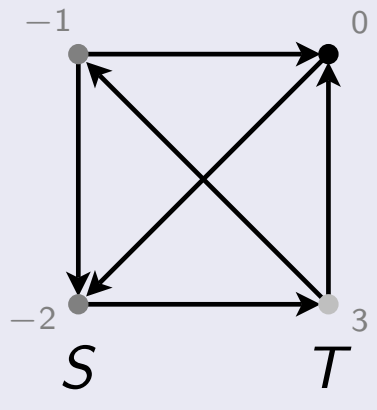
Exemple



Notation

1. $b(v) := d_f^+(v) - d_f^-(v) \ \forall v \in V$,
2. $b(Z) := \sum_{v \in Z} b(v) = d_f^+(Z) - d_f^-(Z) \ \forall Z \subset V$,
3. $S := \{v \in V : b(v) < 0\}$,
4. $T := \{v \in V : b(v) > 0\}$,
5. $M :=$-$b(S) = b(T)$ $(0 = b(V) = b(S) + b(T))$.

Exemple



Algorithme pour trouver une circulation réalisable

Étape 1 : Vérification si f est une circulation

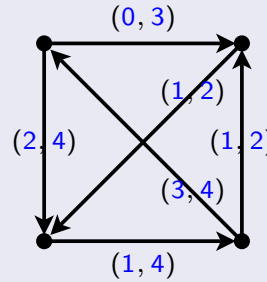
Si $b(v) = 0 \quad \forall v \in V$, alors arrêter avec f qui est une circulation réalisable de (G, f, g), par définition et par $f \leq g$.

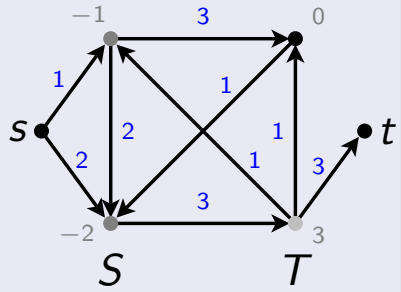
Étape 2 : Construction du réseau

$(G' := (V', A'), g')$ où

1. $S := \{v \in V : b(v) < 0\}$,
2. $T := \{v \in V : b(v) > 0\}$,
3. $V' := V \cup \{s, t\}$,
4. $A' := A \cup \{sv : v \in S\} \cup \{vt : v \in T\}$,
5. $$g'(uv) := \begin{cases} -b(v) & \text{si } u = s, v \in S, \\ b(u) & \text{si } u \in T, v = t, \\ g(uv) - f(uv) & \text{si } uv \in A. \end{cases}$$

Exemple



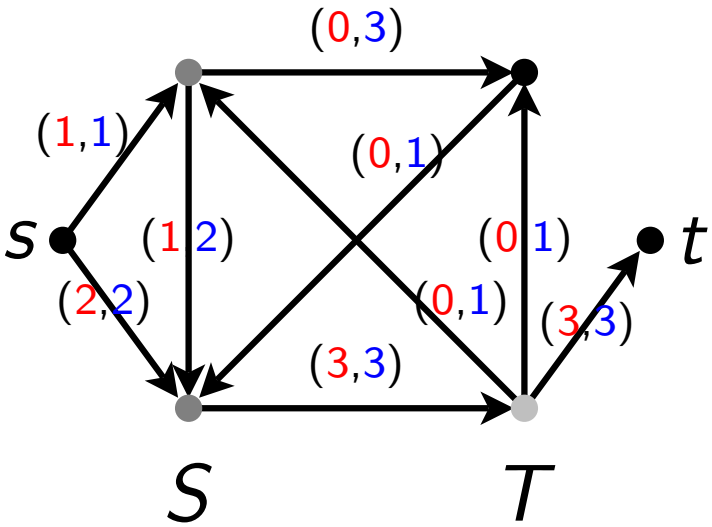


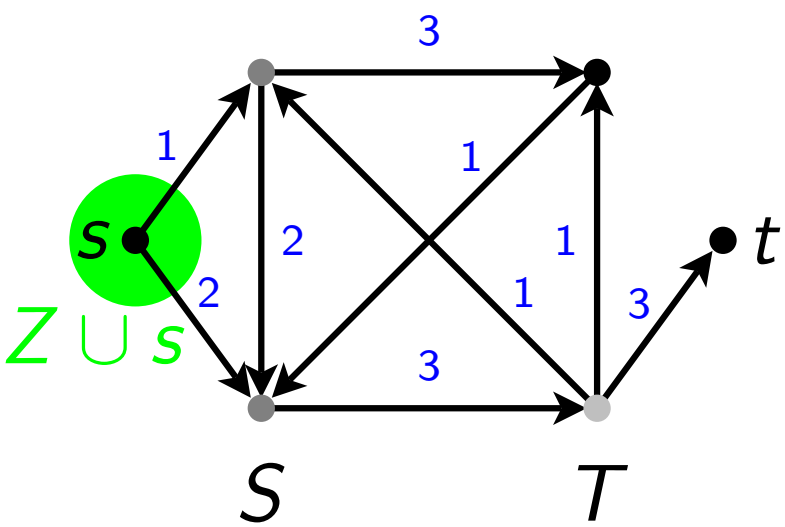
Algorithme pour trouver une circulation réalisable

Étape 3 : Exécution de l'algorithme d'Edmonds-Karp

Trouver dans (G', g')

1. un (s, t)-flot réalisable de valeur maximum x' et
2. une (s, t)-coupe de capacité minimum $Z \cup s$.



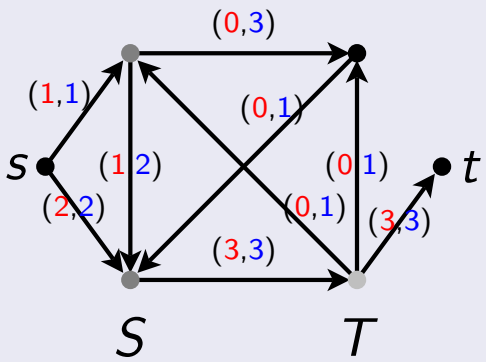


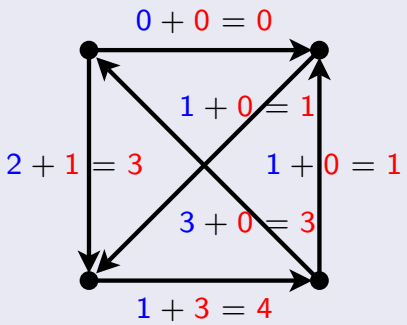
Algorithme pour trouver une circulation réalisable

Étape 4 : Arrêt avec circulation réalisable

Si $val(x') = M$, alors arrêter, $x := f + x'_G$ est une circulation réalisable.

Exemple





$f(e) + x'_G(e) = x(e)$

Étape 5 : Arrêt avec mauvaise coupe

Si $val(x') < M$, alors arrêter, Z viole la condition de Hoffmann.

Algorithme pour trouver une circulation réalisable

Algorithme

Entrée: Réseau (G, f, g) avec $f \leq g$.

Sortie : Circulation réalisable ou coupe violant la condition de Hoffmann.

Étape 1 : Si f est une circulation : Stop avec la circulation réalisable f.

Étape 2 : Construire le réseau (G', g', s, t).

Étape 3 : Trouver dans (G', g', s, t) par l'algorithme d'Edmonds-Karp
un (s, t)-flot réalisable de valeur maximum x' et
une (s, t)-coupe de capacité minimum $Z \cup s$.

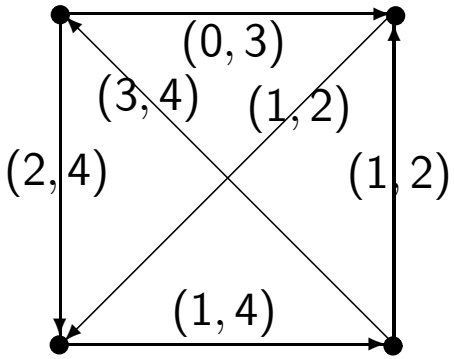
Étape 4 : Si $val(x') = M$: Stop avec la circulation réalisable $x := f + x'_G$.

Étape 5 : Stop avec Z qui viole la condition de Hoffmann.

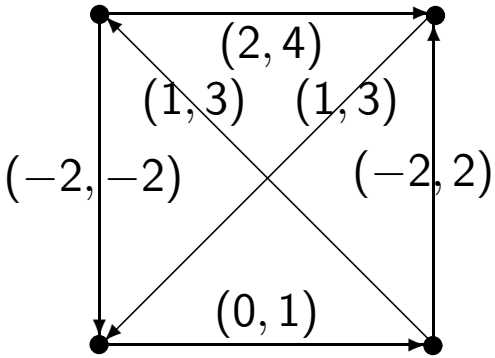
Exercice 4.6

Énoncé

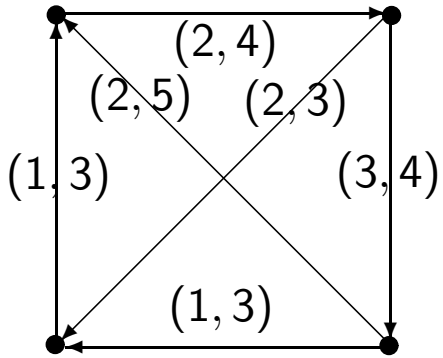
Existe-t-il une circulation réalisable dans les réseaux suivants ?



(a) déjà fait



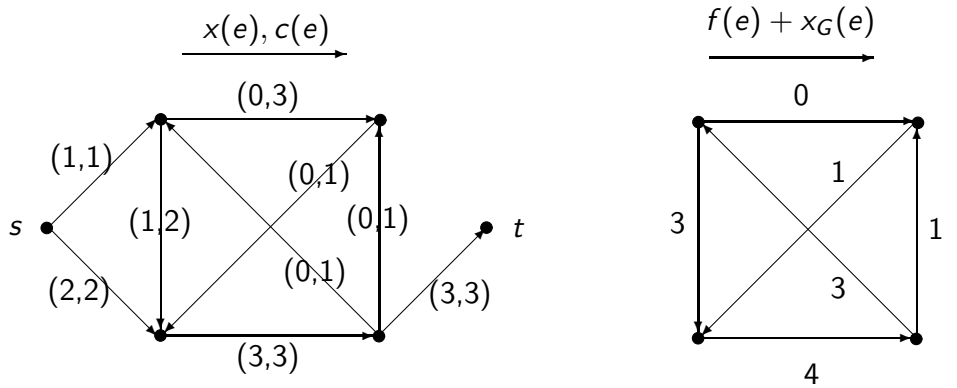
(b)



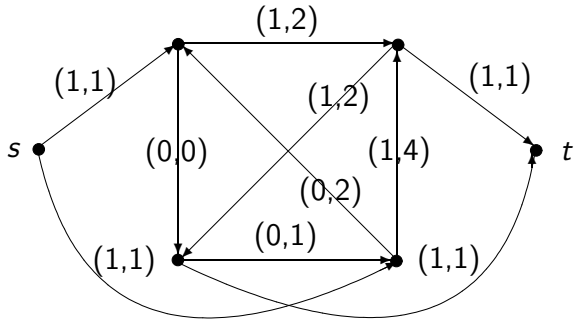
(c)

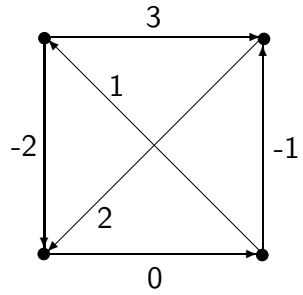
Exercice 4.6

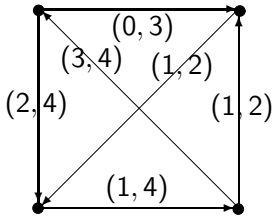
(a)

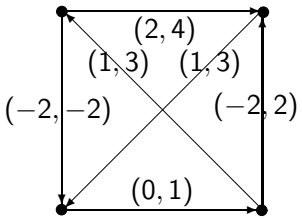


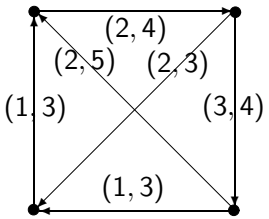
(b)





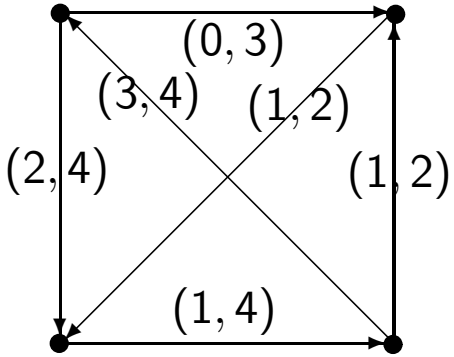


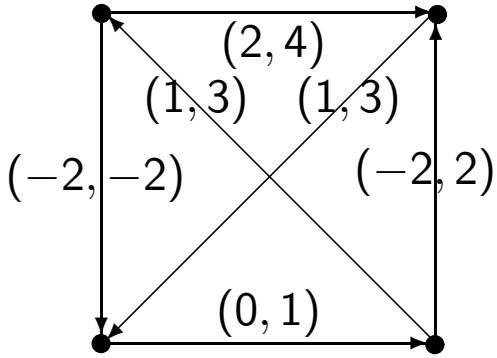


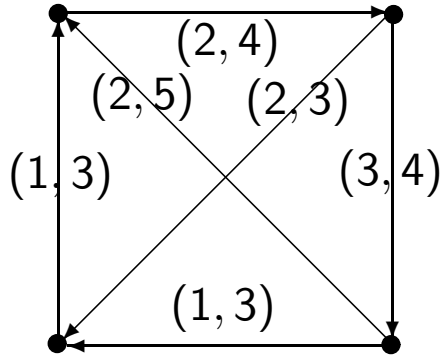


(b)

Exercice 4.6

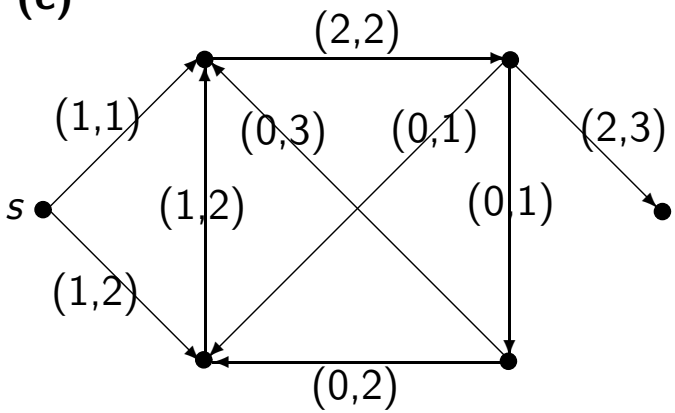


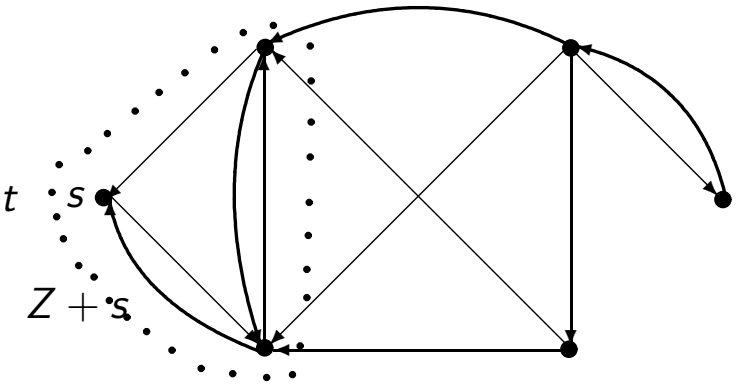


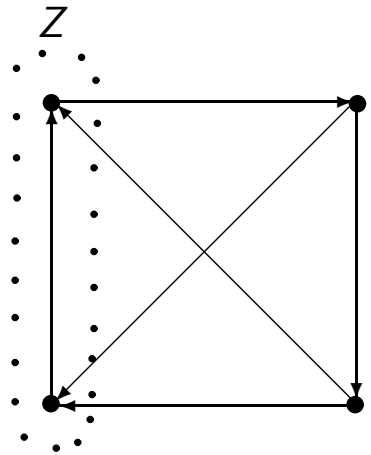


(c)

(c)







Circulation entière

Théorème

Si $f(e)$ et $g(e)$ sont entiers pour chaque arc e de G et
s'il existe une circulation réalisable dans (G, f, g), alors
il en existe une, x, telle que $x(e)$ soit entier pour chaque arc e de G.

Démonstration

1. On exécute l'algorithme précédent.
2. Si on s'arrête avec f, alors $f(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.
3. Dans (G', g'), $g'(e) = g(e) - f(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.
4. Par l'algorithme d'Edmonds-Karp, $x'(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.
5. On ne peut pas s'arrêter avec Z qui viole la condition car il existe une circulation réalisable.
6. On s'arrête avec la circulation réalisable $x = f + x'_G$ et $x(e)$ est entier $\forall e \in A(G)$.