Flots de coût minimum

Étant donnés un graphe orienté $G = (V, A)$, une fonction m sur les sommets de G telle que $m(V) = 0$, deux capacités f et g sur les arcs de G telles que $f \leq g$ et un coût c sur les arcs de G, une fonction x sur les arcs de G est un m-**flot** si (1) est vérifiée et elle est (f, g)-**réalisable** si (2) est vérifiée.

$$d_x^+(v) - d_x^-(v) = m(v) \qquad \forall v \in V, \tag{1}$$
$$f(e) \leq x(e) \leq g(e) \qquad \forall e \in A. \tag{2}$$

Le **réseau auxiliaire** (G_x, g_x, c_x) associé à (G, m, g, c, x) est définie de la façon suivante :
$G_x = (V, A_x^1 \cup A_x^2)$ où $A_x^1 := \{uv \in A : x(uv) < g(uv)\}$ et $A_x^2 := \{vu : uv \in A, x(uv) > 0\}$,
$g_x(uv) = g(uv) - x(uv)$ si $uv \in A_x^1$ et $x(vu)$ si $uv \in A_x^2$,
$c_x(uv) = c(uv)$ si $uv \in A_x^1$ et $-c(vu)$ si $uv \in A_x^2$.
Pour une fonction π sur les sommets, le **coût réduit** est $c^\pi(uv) := c(uv) + \pi(v) - \pi(u)\ \forall uv \in A$.

Exercice 5.1. — Il existe un m-flot (f, g)-réalisable dans G si et seulement si

$$m(V) = 0 \tag{3}$$
$$d_g^+(Z) - d_f^-(Z) \geq m(Z)\ \forall Z \subseteq V. \tag{4}$$

Exercice 5.2. — Montrer que dans le problème du m-flot (f, g)-réalisable de c-coût minimum on peut supposer que $f(e) = 0\ \forall e \in A$ et que $m(v) = 0\ \forall v \in V \setminus \{s, t\}$ où $s, t \in V$.

Exercice 5.3. — Le programme linéaire P associé au problème du m-flot g-réalisable (quand $f(e) = 0\ \forall e \in A$) de c-coût minimum est le suivant :

$$\sum_{vu \in A} x(vu) - \sum_{uv \in A} x(uv) = m(v) \quad \forall v \in V, \tag{5}$$
$$x(e) \leq g(e) \qquad \forall e \in A, \tag{6}$$
$$x(e) \geq 0 \qquad \forall e \in A, \tag{7}$$
$$\sum_{e \in A} c(e)x(e) = w(\min). \tag{8}$$

(a) Montrer que le dual de P est le programme linéaire D suivant :

$$p(e) \geq -c^\pi(e) \quad \forall e \in A, \tag{9}$$
$$p(e) \geq 0 \qquad \forall e \in A, \tag{10}$$
$$\sum_{v \in V} \pi(v)m(v) - \sum_{e \in A} p(e)g(e) = z(\max). \tag{11}$$

(b) Montrer que les conditions des écarts complémentaires pour P et D sont :

$$x(e) > 0 \implies p(e) = -c^\pi(e), \tag{12}$$
$$p(e) > 0 \implies x(e) = g(e). \tag{13}$$

Exercice 5.4. — Étant donné un m-flot g-réalisable x pour (G, m, g, c), montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) x est un m-flot g-réalisable de c-coût minimum,
(b) (G_x, c_x) est sans circuit absorbant,
(c) (G_x, c_x) admet un potentiel π',
(d) il existe une fonction π sur V telle que $c_x^\pi(uv) \geq 0$ pour tout arc uv de G_x,
(e) il existe une fonction π sur V telle que pour tout arc e de G :

$$x(e) > 0 \implies c^\pi(e) \leq 0, \tag{14}$$
$$x(e) < g(e) \implies c^\pi(e) \geq 0. \tag{15}$$

Exercice 5.5. — (**Justification de l'algorithme suppression des circuits absorbants**)

ALGORITHME SUPPRESSION DES CIRCUITS ABSORBANTS :
ENTRÉE : $(G = (V, A), g, c)$ réseau, $k \geq 0$ et $s, t \in V$.
SORTIE : Soit un flot g-réalisable x de s à t de valeur k de c-coût minimum
soit une coupe $\delta_G^+(X)$ séparant s de t de capacité inférieure à k.

Etape 1 : *Recherche d'un flot réalisable de s à t de valeur k dans (G, g).*
$G' := (V \cup s', A \cup s's), g'(e) := g(e)\ \forall e \in A, g'(s's) := k$.
Appliquer l'algorithme d'Edmonds-Karp à (G', g', s', t) pour obtenir dans G'
un flot g'-réalisable x' de s' à t de valeur maximale et
une coupe $\delta_{G'}^+(X')$ séparant s' de t de g'-capacité minimale.
Si $cap_{g'}(X') < k$ alors arrêter avec $\delta_G^+(X)$ où $X := X' - s'$.

Etape 2 : *Recherche d'un circuit absorbant dans (G_x, c_x).*
$x := x'_G$,
$G'' := (V \cup s'', A(G_x) \cup \{s''v : v \in V\})$,
$c''(e) = c_x(e)\ \forall e \in A(G_x), c''(s''v) = 0\ \forall v \in V$.
Appliquer l'algorithme général à (G'', s'', c'').
S'il s'arrête avec les plus courts chemins de s'' alors arrêter avec x.

Etape 3 : *Changement du flot.*
S'il s'arrête avec un circuit C absorbant alors
$\varepsilon := \min\{g_x(uv) : uv \in A(C)\}$,

$$x'(uv) := \begin{cases} x(uv) + \varepsilon & \text{si } uv \in A(C) \cap A_x^1 \\ x(uv) - \varepsilon & \text{si } vu \in A(C) \cap A_x^2 \\ x(uv) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Aller à l'Etape 2.

(a) Montrer que, si l'algorithme s'arrête à l'Etape 1, alors $\delta_G^+(X)$ est une coupe de G séparant s de t de c-capacité inférieure à k.
(b) Montrer que, si l'algorithme s'arrête à l'Etape 2, alors x est un flot g-réalisable de s à t de valeur k de c-coût minimum.
(c) Montrer que, à l'Etape 3, $\varepsilon > 0$.
(d) Montrer que, à l'Etape 3, x' est un flot g-réalisable de s à t dont le c-coût est égal au c-coût de x plus $\varepsilon c_x(C)$.