Optimisation Combinatoire 2A
Applications des flots

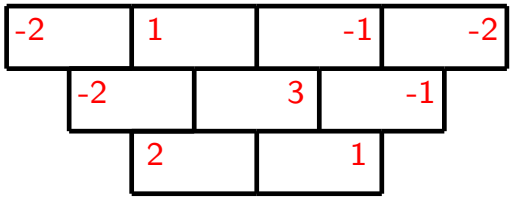
Zoltán Szigeti

Ensimag
Grenoble INP

Applications

Exploitation d'une mine à ciel ouvert

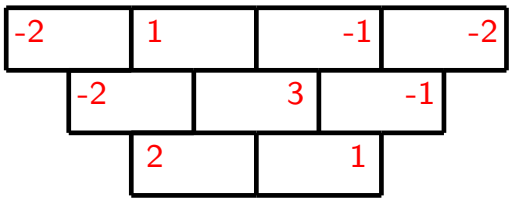
- Le directeur d'une entreprise voudrait exploiter une mine à ciel ouvert
  - en procédant à des extractions par blocs et
  - en maximisant le profit.
    - L'extraction d'un bloc n'est possible que si les blocs situés juste au-dessus de ce bloc sont déjà extraits.
- On connait par avance pour chaque bloc le profit de son extraction.
  - Cette valeur peut être positive ou négative, elle dépend du coût
    - de l'extraction du bloc et
    - de la richesse de son contenu.
- Modéliser cela par un problème de coupe minimum dans un réseau.

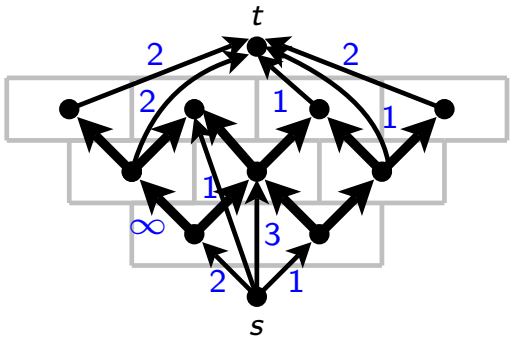


Applications

Modélisation

1. $p(v)$ = profit du bloc v,
2. P = blocs de profit positif,
3. N = blocs de profit négatif,
4. Réseau $(G = (V, A), g)$ où
   1. $V = P \cup N \cup \{s, t\}$,
   2. $A = \{\text{les arcs de contraintes}\} \cup \{sv : v \in P\} \cup \{ut : u \in N\}$,
   3. $g(uv) := \begin{cases} \infty & \text{si } uv \text{ arc de contrainte,} \\ p(v) & \text{si } u = s, \\ -p(u) & \text{si } v = t. \end{cases}$

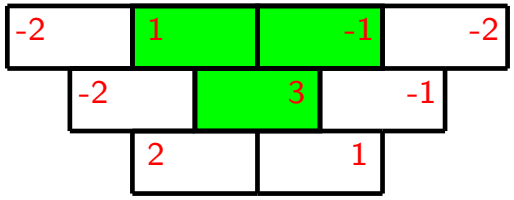


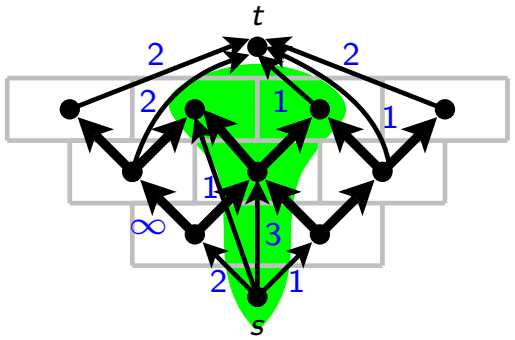


Applications

Lemme

$cap(B \cup s) < \infty \iff$ les blocs dans B satisfont la contrainte d'extraction. (Par construction.)



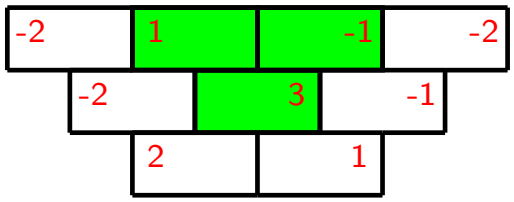


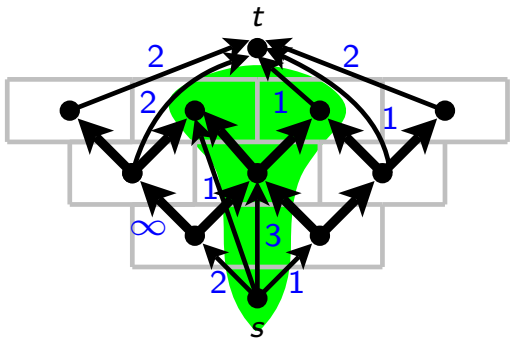
Applications

Lemme

$$
\begin{aligned}
cap(B \cup s) &= \sum_{v \in P \setminus B} g(sv) + \sum_{v \in N \cap B} g(vt) = \sum_{v \in P \setminus B} p(v) + \sum_{v \in N \cap B} -p(v) \\
&= (\sum_{v \in P} p(v) - \sum_{v \in P \cap B} p(v)) - (\sum_{v \in B} p(v) - \sum_{v \in P \cap B} p(v)) \\
&= \sum_{v \in P} p(v) - \sum_{v \in B} p(v).
\end{aligned}
$$

minimiser = constante − maximiser





Applications

Calcul distribué sur un ordinateur à deux processeurs

- On voudrait distribuer les modules d'un programme sur un ordinateur à deux processeurs
  - en minimisant le coût total
    - de traitement et
    - de communication entre processeurs.
- On connait par avance
  - d'une part pour chaque module le coût de son traitement sur chacun des deux processeurs et
  - d'autre part pour chaque paire de modules le coût de communication entre processeurs
    - si ces deux modules sont associés aux processeurs différents.
- Modéliser ce problème par un problème de coupe minimum dans un réseau.

Applications

coût de traitement

	M_1	M_2	M_3	M_4	
P_1	4	4	1	2	a_i
P_2	1	2	4	4	b_i

coût de communication

	M_1	M_2	M_3	M_4	
M_1	0	5	1	1	
M_2	5	0	1	1	c_{ij}
M_3	1	1	0	5	
M_3	1	1	5	0	

Coût à minimiser

coût total =

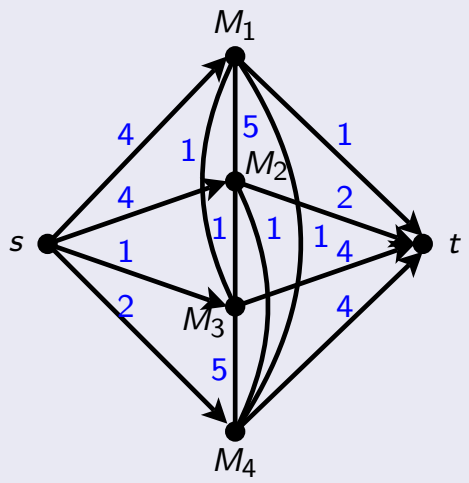
coût de traitement des modules traités C_1 sur P_1 +
coût de traitement des modules traités C_2 sur P_2 +
coût de communication pour les modules traités sur les processeurs différents

$$= \sum_{M_i \in C_1} a_i + \sum_{M_j \in C_2} b_j + \sum_{M_i \in C_1, M_j \in C_2} c_{ij}.$$

Modélisation

Réseau $(G = (V, A), g)$ où

1. $V = \{M_1, M_2, M_3, M_4, s = P_1, t = P_2\}$,
2. $A = \{uv, vu : u, v \in V \setminus \{s, t\}\}$
   $\cup\{sv : v \in V \setminus \{s, t\}\}$
   $\cup\{vt : v \in V \setminus \{s, t\}\}$,
3. $g(uv) := \begin{cases} c_{ij} & \text{si } uv = M_iM_j, \\ a_i & \text{si } uv = sM_i, \\ b_j & \text{si } uv = M_jt. \end{cases}$



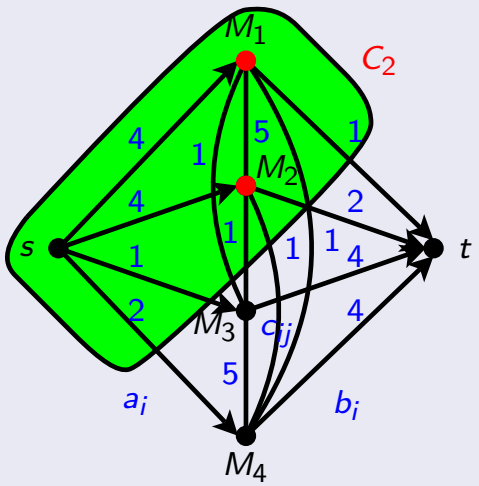
	M_1	M_2	M_3	M_4	
P_1	4	4	1	2	a_i
P_2	1	2	4	4	b_i

	M_1	M_2	M_3	M_4	
M_1	0	5	1	1	
M_2	5	0	1	1	c_{ij}
M_3	1	1	0	5	
M_3	1	1	5	0	

Lemme

$$
\begin{aligned}
cap(C_2 \cup s) &= \sum_{M_i \in C_1} g(sM_i) + \sum_{M_j \in C_2} g(M_j t) + \sum_{M_i \in C_1, M_j \in C_2} g(M_i M_j) \\
&= \sum_{M_i \in C_1} a_i + \sum_{M_j \in C_2} b_j + \sum_{M_i \in C_1, M_j \in C_2} c_{ij},
\end{aligned}
$$

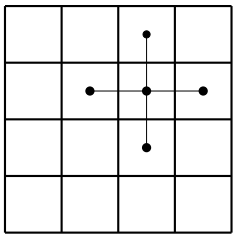
qui est le coût total à minimiser où C_i = les modules traités sur P_i.



Applications

Segmentation des images

- Nous devons diviser une image en régions cohérentes, autrement dit, il nous faut distinguer les objets du fond de l'image.
- Chaque $i \in V$, où V est l'ensemble des pixels de l'image,
  - appartient à un objet avec vraisemblance p_i et
  - appartient au fond de l'image avec vraisemblance q_i.
- On a aussi une fonction $r(i,j)$ de pénalité de séparation pour chaque paire $(i,j) \in E$ où E est l'ensemble des paires de pixels voisins.
- Il s'agit de trouver une partition S, T de V qui maximise $\sum_{i \in S} p_i + \sum_{j \in T} q_j - \sum_{i \in S, j \in T, (i,j) \in E} r(i,j)$.
- Modéliser ce problème par un problème de coupe minimum dans un réseau.

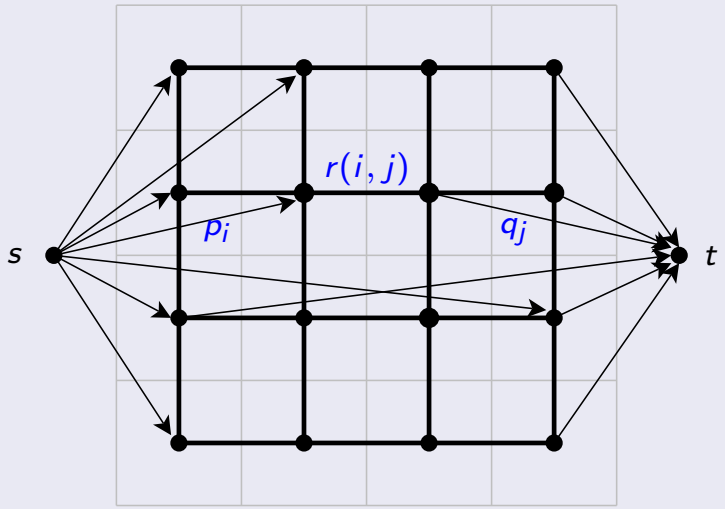


Applications

Modélisation

Réseau $(G = (V', A), g)$ où

1. $V' = V \cup \{s, t\}$,
2. $A = \{uv, vu : uv \in E\} \cup \{sv : v \in V\} \cup \{vt : v \in V\}$,
3. $g(uv) := \begin{cases} p_i & \text{si } uv = si, \\ q_j & \text{si } uv = jt, \\ r(i,j) & \text{si } uv = ij \in E. \end{cases}$

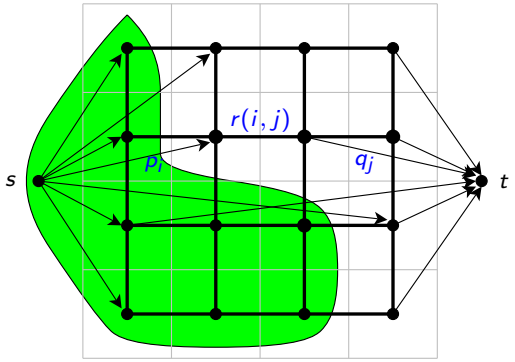


Applications

Lemme

$$
\begin{aligned}
cap(S \cup s) &= \sum_{j \in T} g(sj) + \sum_{i \in S} g(it) + \sum_{i \in S, j \in T, ij \in E} g(ij) \\
&= \sum_{j \in T} p_j + \sum_{i \in S} q_i + \sum_{i \in S, j \in T, ij \in E} r(i,j) \\
&= \sum_{i \in V} (p_i + q_i) - (\sum_{i \in S} p_i + \sum_{j \in T} q_j - \sum_{i \in S, j \in T, ij \in E} r(i,j)).
\end{aligned}
$$

minimiser = constante − maximiser



Coupe de capacité maximum

Problème

Etant donné un réseau (G, g) et deux sommets s, t de G, trouver une (s, t)-coupe de capacité maximum.

Remarque

Le problème de (s, t)-coupe de capacité maximum est NP-difficile.

Circulation

Problème

Peut-on faire circuler l'eau dans un système de tuyaux satisfaisant deux contraintes de capacité des tuyaux ?

Modélisation

Graphe orienté G, deux capacités f et g sur chaque arc avec $f(e) \leq g(e)$.
décider s'il existe une circulation réalisable.

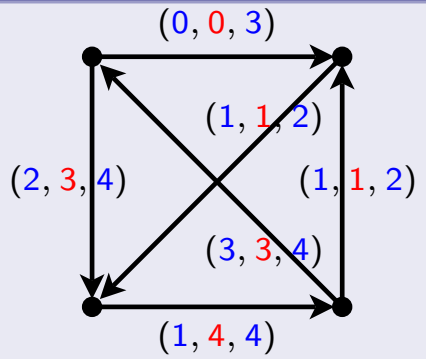
Définitions

Une fonction x sur les arcs de G est

1. une circulation si elle vérifie la contrainte de conservation du flot : $d_x^+(v) = d_x^-(v)\ \forall v \in V(G) \iff d_x^+(Z) = d_x^-(Z)\ \forall Z \subseteq V(G)$.
2. réalisable si elle satisfait la contrainte de capacités : $f(e) \leq x(e) \leq g(e)\ \forall e \in A(G)$.

Circulation

Exemple



$$(f(e), x(e), g(e))$$

Lemme (Condition nécessaire pour avoir une circulation réalisable)

Ce qui doit entrer doit pouvoir sortir :

$$d_f^-(Z) \leq d_x^-(Z) = d_x^+(Z) \leq d_g^+(Z) \quad \forall Z \subseteq V.$$

Théorème (Hoffman)

Il existe une circulation réalisable dans le réseau (G, f, g) si et seulement si

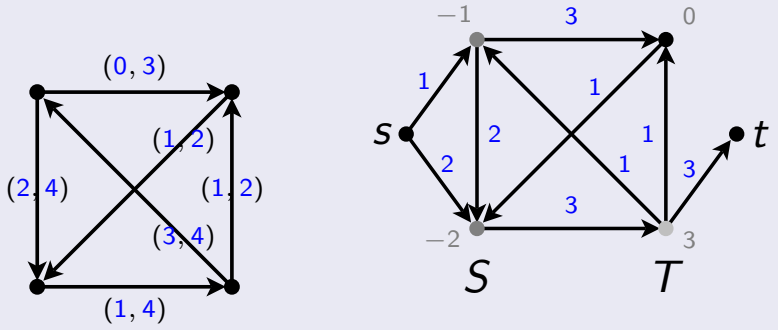
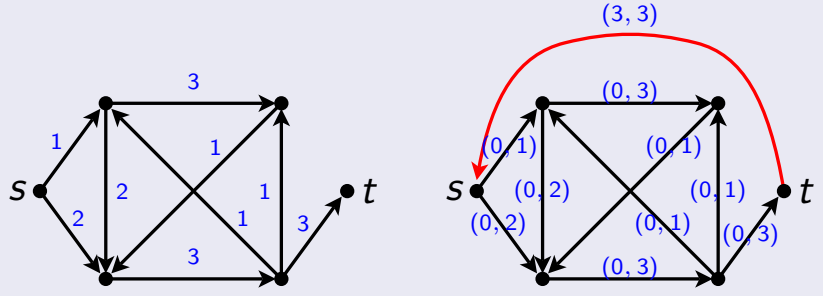
$$d_f^-(Z) \leq d_g^+(Z) \quad \forall Z \subseteq V.$$

Circulation

Remarques

1. Le modèle de flot et celui de circulation sont équivalent.
2. Le Théorème de Ford-Fulkerson et celui de Hoffman sont équivalent.
3. On aura un algorithme pour trouver une circulation réalisable ou une coupe violant la condition de Hoffman.
4. On verra la prochaine fois les démonstrations, l'algorithme et une application des circulations.

Circulation se réduit à flot:



Flot se réduit à circulation: