Optimisation Combinatoire 2A
Applications des flots TD

Zoltán Szigeti

Ensimag
INP Grenoble

Théorème min-max

Théorème (Ford-Fulkerson)

1. $\max\{val(x) : (s,t)\text{-flot réalisable } x\} = \min\{cap(Z) : (s,t)\text{-coupe } Z\}$.

Théorème (Ford-Fulkerson)

Si $g(e)$ est entier pour chaque arc e de G, alors il existe un flot réalisable x de valeur maximum tel que $x(e)$ soit entier pour chaque arc e de G.

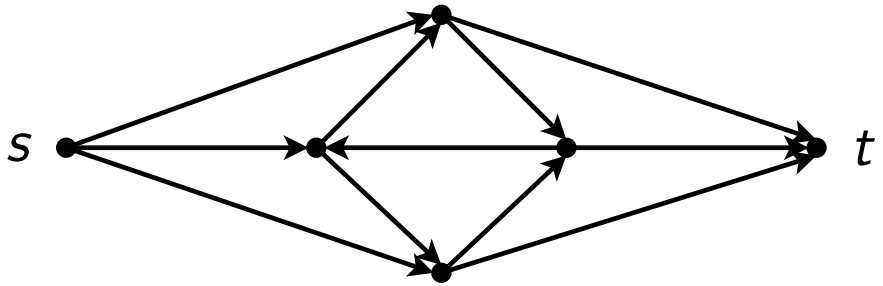
Exercice 3.6

Énoncé

Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté, $s, t \in V$ et $k \in \mathbb{Z}_+$ tels que

$$\begin{aligned} d^+(s) - d^-(s) &= k, \\ d^+(t) - d^-(t) &= -k, \\ d^+(v) - d^-(v) &= 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}. \end{aligned}$$

(a) Montrer que G possède k (s, t)-chemins arc-disjoints.
(b) Trouver trois (s, t)-chemins arc-disjoints dans le graphe orienté suivant.



Exercice 3.7

Énoncé

Le but de cet exercice est de démontrer le **Théorème de Menger:**

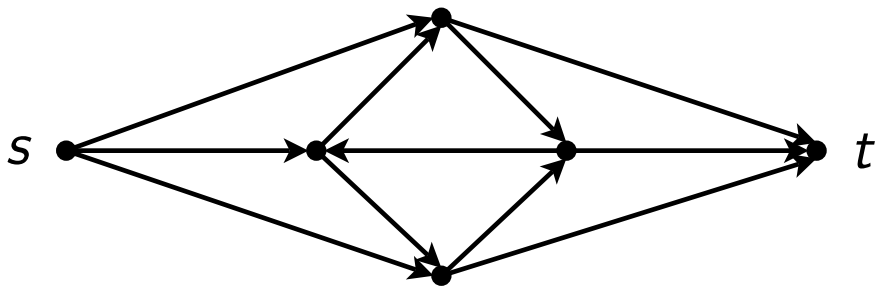
Etant donnés un graphe orienté $G = (V, A)$ et deux sommets $s, t \in V$,
le nombre maximum de (s, t)-chemins arc-disjoints =
le degré sortant minimum d'une (s, t)-coupe.

Soient $G' := G - \delta^+(t) - \delta^-(s)$ et $g(e) := 1$ pour chaque arc e de G'.

(a) Montrer que max=la valeur maximum d'un (s, t)-flot réalisable dans (G', g).

(b) Montrer que min=la capacité minimum d'une (s, t)-coupe dans (G', g).

(c) En déduire le théorème de Menger.



Exercice 3.7

Démonstration de (a)

1. Soient $P_1, ..., P_{\max}$ max (s,t)-chemins arc-disjoints.
2. Soit $x(e) = 1$ si $e \in \bigcup A(P_i)$ et $x(e) = 0$ sinon.
3. Si $v \neq s, t$ est dans ℓ chemins: $d_x^+(v) = \ell = d_x^-(v)$ et x est donc un (s,t)-flot. Puisque $0 \leq x(e) \leq 1 = g(e)\ \forall e,\ x$ est g-réalisable.
4. flot max $\geq val(x) = d_x^+(s) =$ max.
5. Puisque $g(e) = 1\ \forall e$, il existe un flot g-réalisable entier x de valeur $k :=$flot max, $x(e)$ est donc égal à 0 ou $1\ \forall e$.
6. Soit $G'' := (V, A'')$ où $A'' := \{e \in A(G') : x(e) = 1\}$.
7. Comme x est un (s,t)-flot de valeur k, les conditions de l'Exercice 3.6 sont satisfaites, il existe donc k (s,t)-chemins arc-disjoints dans G'', et ainsi dans G, donc max $\geq k =$ flot max.
8. Par (4) et (7), on a max $=$ flot max.

Exercice 3.7

Démonstration de (b)

Par la définition de g, on a $d_G^+(Z) = cap_g(Z)$ pour toute (s,t)-coupe, ce qui implique (b).

Démonstration de (c)

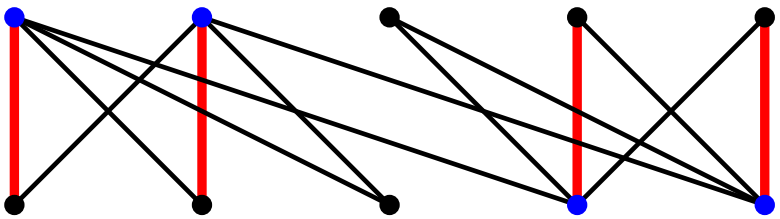
Par (a), le théorème de Ford-Fulkerson et (b), on a

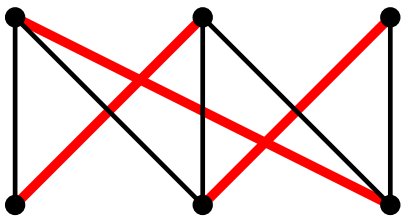
$$\text{max} = \text{flot max} = \text{coupe min} = \text{min}.$$

Rappel

Définitions : $G = (V, E)$

1. Couplage : $M \subseteq E$ tel que $d_M(v) \leq 1 \ \forall v \in V$.
2. Couplage parfait : $M \subseteq E$ tel que $d_M(v) = 1 \ \forall v \in V$.
3. Transversal : $T \subseteq V$ tel que $T \cap \{u, v\} \neq \emptyset \ \forall uv \in E$.
4. $\nu(G)$ $:= \max\{|M| : M$ couplage de $G\}$.
5. $\tau(G)$ $:= \min\{|T| : T$ transversal de $G\}$.





Relation entre $\nu(G)$ et $\tau(G)$

Lemme 1

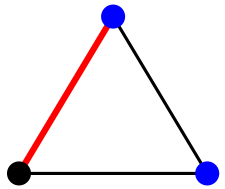
Pour tout graphe G, $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Démonstration

1. Soient M un couplage maximum et T un transversal minimum de G.
2. Puisque T est un transversal, T contient au moins une extrémité de chaque arête e de M, disons v_e.
3. Comme M est un couplage, $v_e \neq v_f$ si $e, f \in M$ et $e \neq f$.
4. $|M| = |\{v_e \in T : e \in M\}| \leq |T|$.
5. $\nu(G) = |M| \leq |T| = \tau(G)$.

Exemple

$\nu(K_3) = 1 < 2 = \tau(K_3)$.



Exercice 3.8

Énoncé

Le but de cet exercice est de démontrer le **Théorème de Kőnig:**

Etant donné un graphe biparti $G = (U, V; E)$, le cardinal maximum d'un couplage de G = le cardinal minimum d'un ensemble transversal de G.

On construit un réseau $(D := (W, A), g)$ où $W := U \cup V \cup \{s, t\}$, $A := \{su : u \in U\} \cup \{vt : v \in V\} \cup \{uv : u \in U, v \in V, uv \in E\}$, $g(su) := 1\ \forall u \in U$, $g(vt) := 1\ \forall v \in V$ et $g(uv) := |U| + 1\ \forall uv \in E$.

Soient x un (s, t)-flot réalisable entier de valeur maximum dans (D, g), Z une (s, t)-coupe de capacité minimum dans (D, g), $M := \{uv \in E : x(uv) = 1\}$ et $T := (U \setminus Z) \cup (V \cap Z)$.

(a) Montrer que M est un couplage de G et que $|M| = val(x)$.

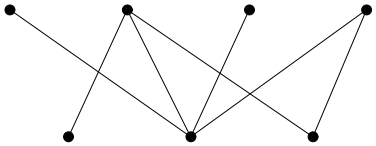
(b) Montrer que T est un transversal de G et que $|T| = cap(Z)$.

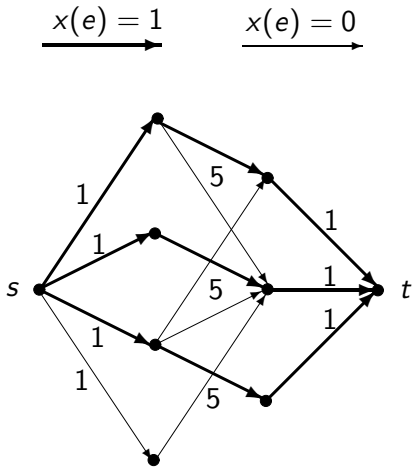
(c) En déduire le Théorème de Kőnig.

Exercice 3.8

Démonstration de (a)

1. Il existe un entier (s,t)-flot g-réalisable x de valeur maximum.
2. Puisque $d_x^+(u) = d_x^-(u) = x(su) \leq g(su) = 1 \ \forall u \in U$,
   et $d_x^-(v) = d_x^+(v) = x(vt) \leq g(vt) = 1 \ \forall v \in V$, on a
   1. $x(e) = 0$ ou $1 \ \forall e \in A$ et
   2. au plus une arête de M est incidente à $w \in U \cup V$.
3. M est donc un couplage de G.
4. $val(x) = d_x^+(U \cup s) - d_x^-(U \cup s) = d_x^+(U \cup s) = \sum_{x(uv)=1, uv \in E} 1 = |M|$.

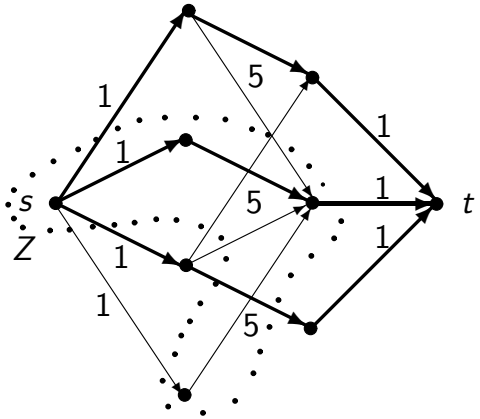


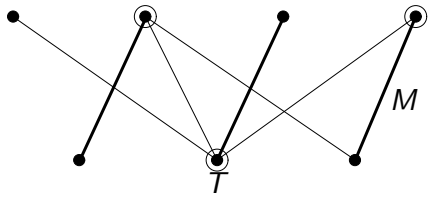


Exercice 3.8

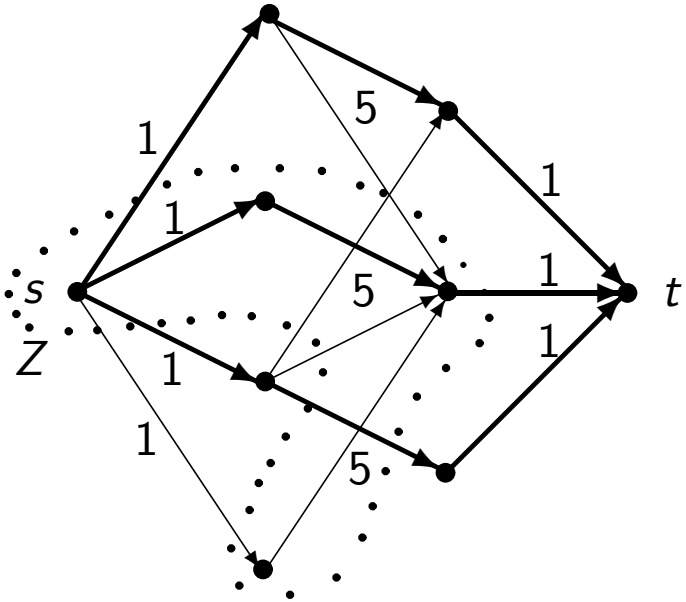
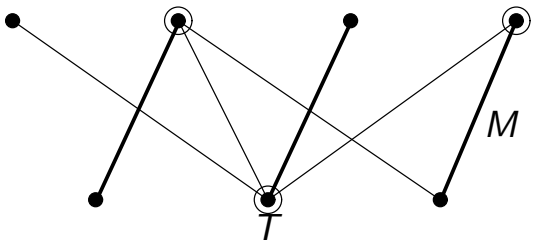
Démonstration de (b)

1. $cap(Z) \leq d_g^+(s) = |U|$: Z est une (s,t)-coupe de capacité minimum.
2. Soit K l'ensemble d'arcs dans D de $U \cap Z$ à $V \setminus Z$.
$$\begin{aligned} |U| \geq cap(Z) &= \sum_{u \in U \setminus Z} g(su) + \sum_{v \in V \cap Z} g(vt) + \sum_{uv \in K} g(uv) \\ &= \sum_{u \in U \setminus Z} 1 + \sum_{v \in V \cap Z} 1 + \sum_{uv \in K} (|U|+1) \\ &= |U \setminus Z| + |V \cap Z| + |K|(|U|+1) \\ &= |T| + |K|(|U|+1). \end{aligned}$$
3. Donc $K = \emptyset$, et ainsi T est un transversal et $cap(Z) = |T|$.





Exercice 3.8

Démonstration de (c)

1. Par le théorème de Ford-Fulkerson, (a), Lemme 1 et (b), $cap(Z) = val(x) = |M| \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq |T| = cap(Z)$,
2. On a donc égalité partout, en particulier $\nu(G) = \tau(G)$.