Optimisation Combinatoire 2A
Flots TD

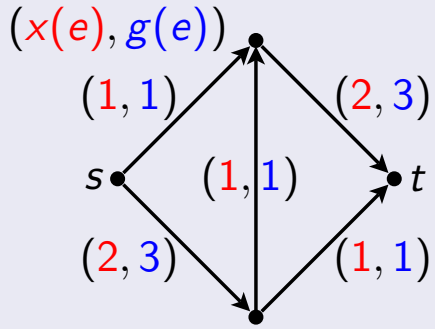
Zoltán Szigeti

Ensimag
INP Grenoble

Définition des flots

Définition

1. Étant donnés
   1. un graphe orienté $G = (V, A)$,
   2. $s, t \in V$ tels que $\delta^-(s) = \emptyset = \delta^+(t)$,
   3. une capacité non-négative g sur les arcs,



2. une fonction x sur les arcs est
   1. un **flot** de s à t si la **conservation du flot** est vérifiée :

$$\sum_{uv \in A} x(uv) = \sum_{vu \in A} x(vu) \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}.$$

   2. **réalisable** si la **contrainte de capacité** est vérifiée :

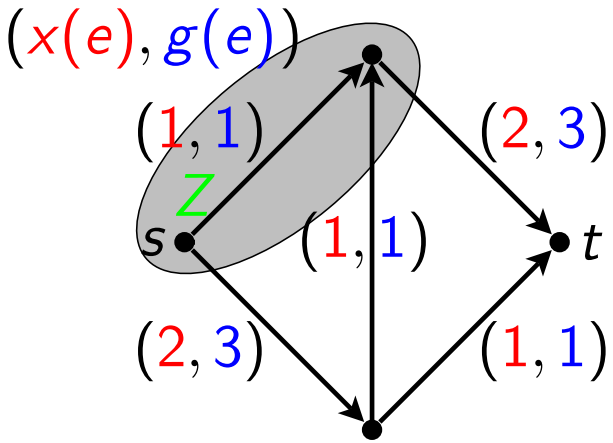
$$0 \leq x(e) \leq g(e) \quad \forall e \in A.$$

Notation

Notation

Étant donnés un graphe orienté G, une capacité g, un flot x, $Z \subseteq V(G)$,

1. **Valeur sortante de Z :** $d_x^+(Z) = \sum_{e \in \delta^+(Z)} x(e)$,
2. **Conservation du flot :** $d_x^-(v) = d_x^+(v)$,
3. **Valeur du flot :** $val(x) = d_x^+(s)$,
4. **(s,t)-coupe Z :** si $s \in Z \subseteq V \setminus t$,
5. **Capacité de (s,t)-coupe Z :** $cap(Z) = d_g^+(Z)$.



$d_x^+(Z) = 4$

$d_x^+(s) = 3$

$d_g^+(Z) = 6$

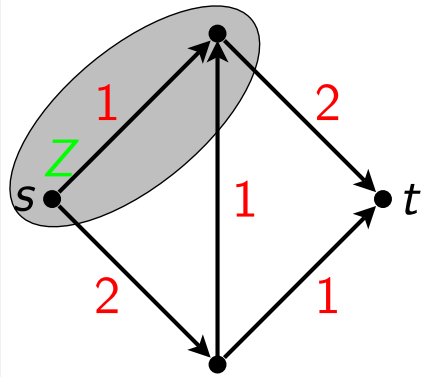
Valeur du flot

Lemme

Pour tout (s,t)-flot x et toute (s,t)-coupe Z : $\text{val}(x) = d_x^+(Z) - d_x^-(Z)$.

Démonstration

$$
\begin{aligned}
val(x) &= d_x^+(s) \\
&= d_x^+(s) - \ 0 \quad + \sum_{v \in Z-s} 0 \\
&= d_x^+(s) - d_x^-(s) + \sum_{v \in Z-s} (d_x^+(v) - d_x^-(v)) \\
&= \sum_{v \in Z} (d_x^+(v) - d_x^-(v)) \\
&= d_x^+(Z) - d_x^-(Z).
\end{aligned}
$$



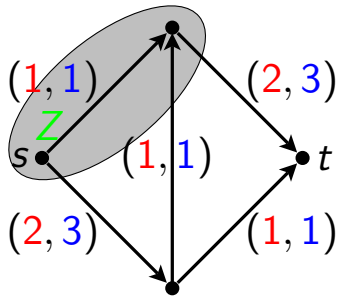
Flot max $\leq$ Coupe min

Lemme

Pour tout (s,t)-flot réalisable x et toute (s,t)-coupe Z : $\text{val}(x) \leq \text{cap}(Z)$.

Démonstration

$$\begin{aligned} val(x) &= d_x^+(Z) - d_x^-(Z) \\ &\leq d_g^+(Z) - d_0^-(Z) \\ &= d_g^+(Z) = cap(Z). \end{aligned}$$



Remarque

Si x est un (s,t)-flot réalisable et Z est une (s,t)-coupe tels que $\text{val}(x) = \text{cap}(Z)$, alors ils sont optimaux.

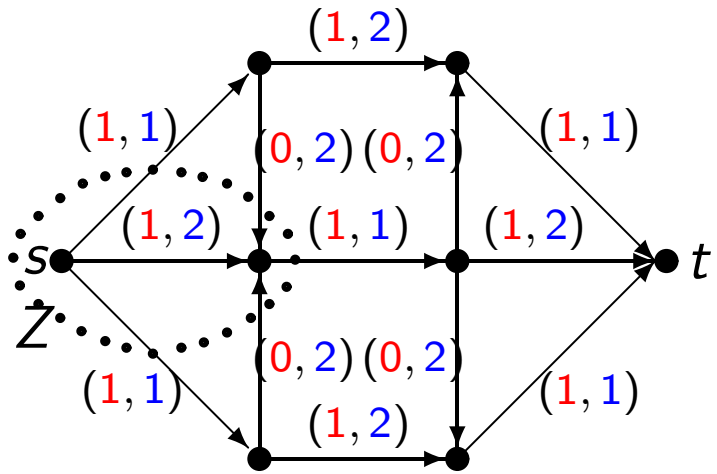
Problème

Trouver un (s,t)-flot réalisable de valeur maximum et une (s,t)-coupe de capacité minimum.

Théorème min-max

Théorème (Ford-Fulkerson)

1. Un (s,t)-flot réalisable x est de valeur maximum si et seulement si il n'existe pas de (s,t)-chemin dans G_x.
2. $\max\{val(x) : \ (s,t)\text{-flot réalisable } x\} = \min\{cap(Z) : \ (s,t)\text{-coupe } Z\}$.



Algorithme

Algorithme d'Edmonds-Karp

Entrée : Réseau (G, g) tel que $g \geq 0$ et $s, t \in V$: $\delta^-(s) = \emptyset = \delta^+(t)$.

Sortie : (s, t)-flot réalisable x et (s, t)-coupe Z tels que $val(x) = cap(Z)$.

Algorithme

Etape 0: $x_0(e) = 0 \ \forall e \in A, \ i := 0$.

Etape 1: Construire le graphe auxiliaire $G_i := (V, A_i^1 \cup A_i^2)$ où
$A_i^1 := \{uv : uv \in A, x_i(uv) < g(uv)\}$ et
$A_i^2 := \{vu : uv \in A, x_i(uv) > 0\}$.

Etape 2: Appliquer l'algorithme Recherche en largeur d'abord sur G_i et s pour obtenir $Z_i \subseteq V$ et s-arborescence F_i de $G_i[Z_i]$: $\delta^+_{G_i}(Z_i) = \emptyset$.

Etape 3: Si $t \notin Z_i$ alors arrêter avec $x := x_i$ et $Z := Z_i$.

Etape 4: Sinon $P_i := F_i[s, t]$, le (s, t)-chemin unique dans F_i.

Etape 5: $\varepsilon_i^1 := \min\{g(uv) - x_i(uv) : uv \in A(P_i) \cap A_i^1\}$,
$\varepsilon_i^2 := \min\{x_i(uv) : vu \in A(P_i) \cap A_i^2\}$,
$\varepsilon_i := \min\{\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2\}$.

Etape 6:
$$x_{i+1}(uv) := \begin{cases} x_i(uv) + \varepsilon_i & \text{si } uv \in A(P_i) \cap A_i^1 \\ x_i(uv) - \varepsilon_i & \text{si } vu \in A(P_i) \cap A_i^2 \\ x_i(uv) & \text{sinon.} \end{cases}$$

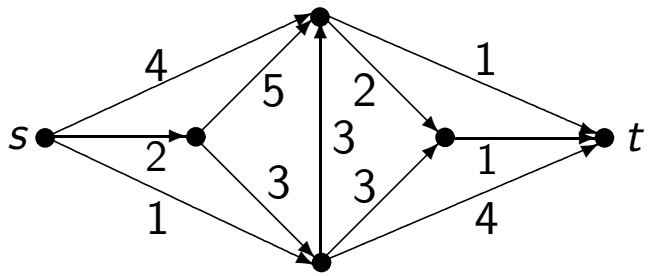
Etape 7: $i := i + 1$ et aller à l'Etape 1.

Exercice 3.4

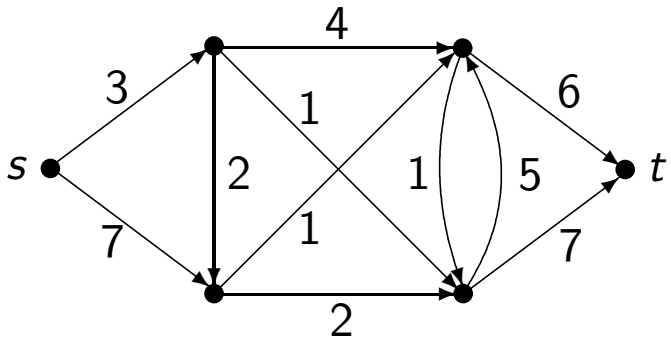
Énoncé

Déterminer un (s, t)-flot réalisable de valeur maximum et une (s, t)-coupe de capacité minimum dans les réseaux suivants:

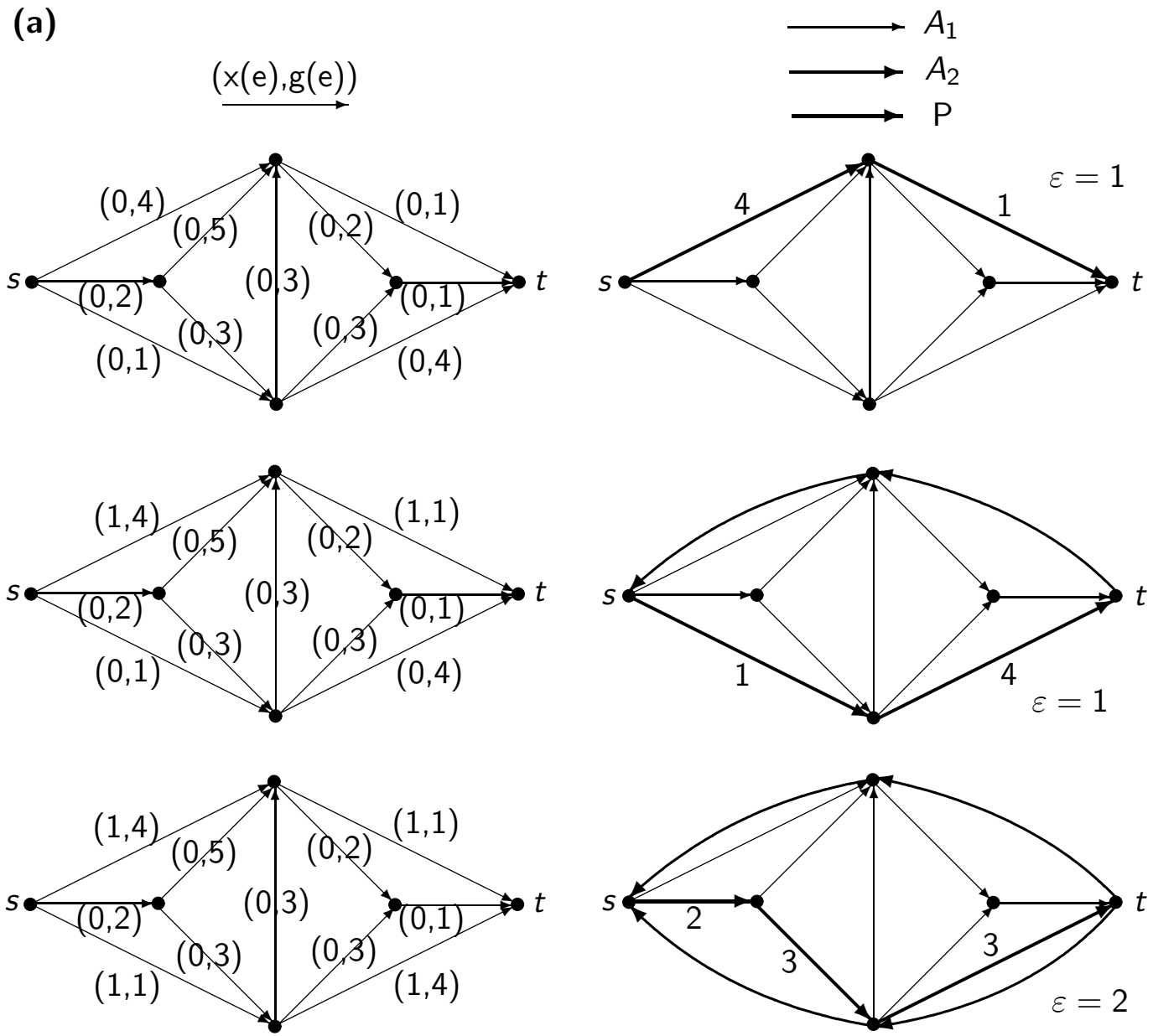
(a)



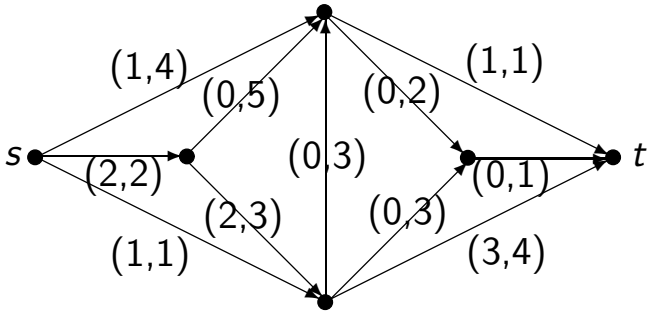
(b)

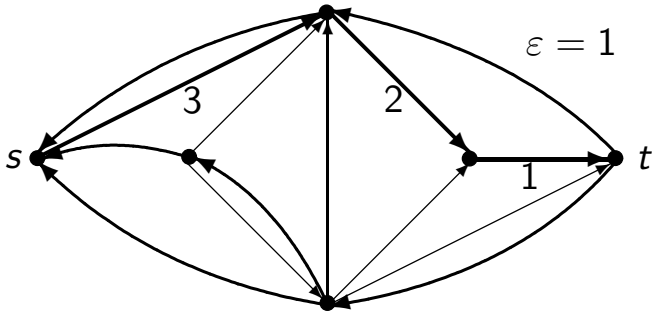


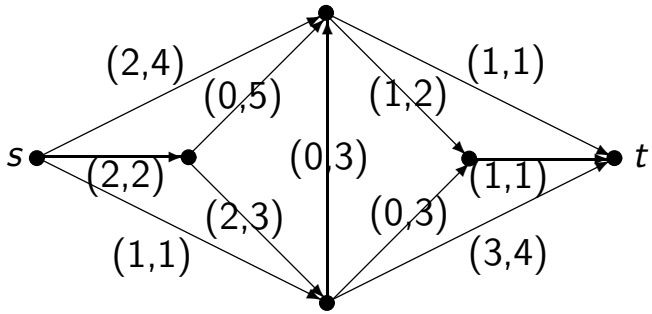
Exercice 3.4 : Solution de (a)

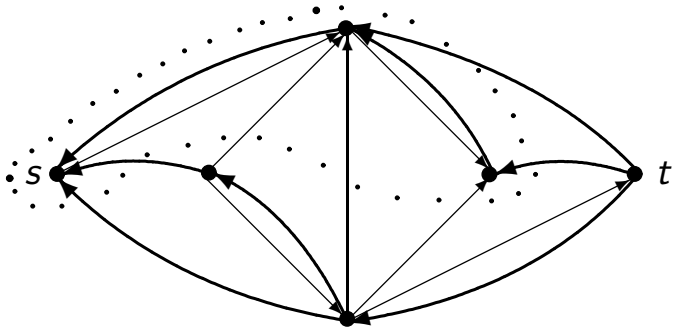


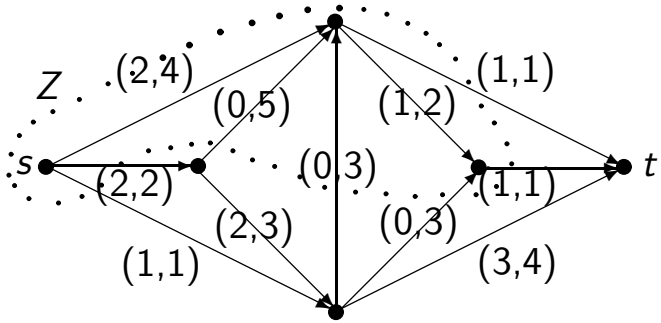
Exercice 3.4 : Solution de (a)



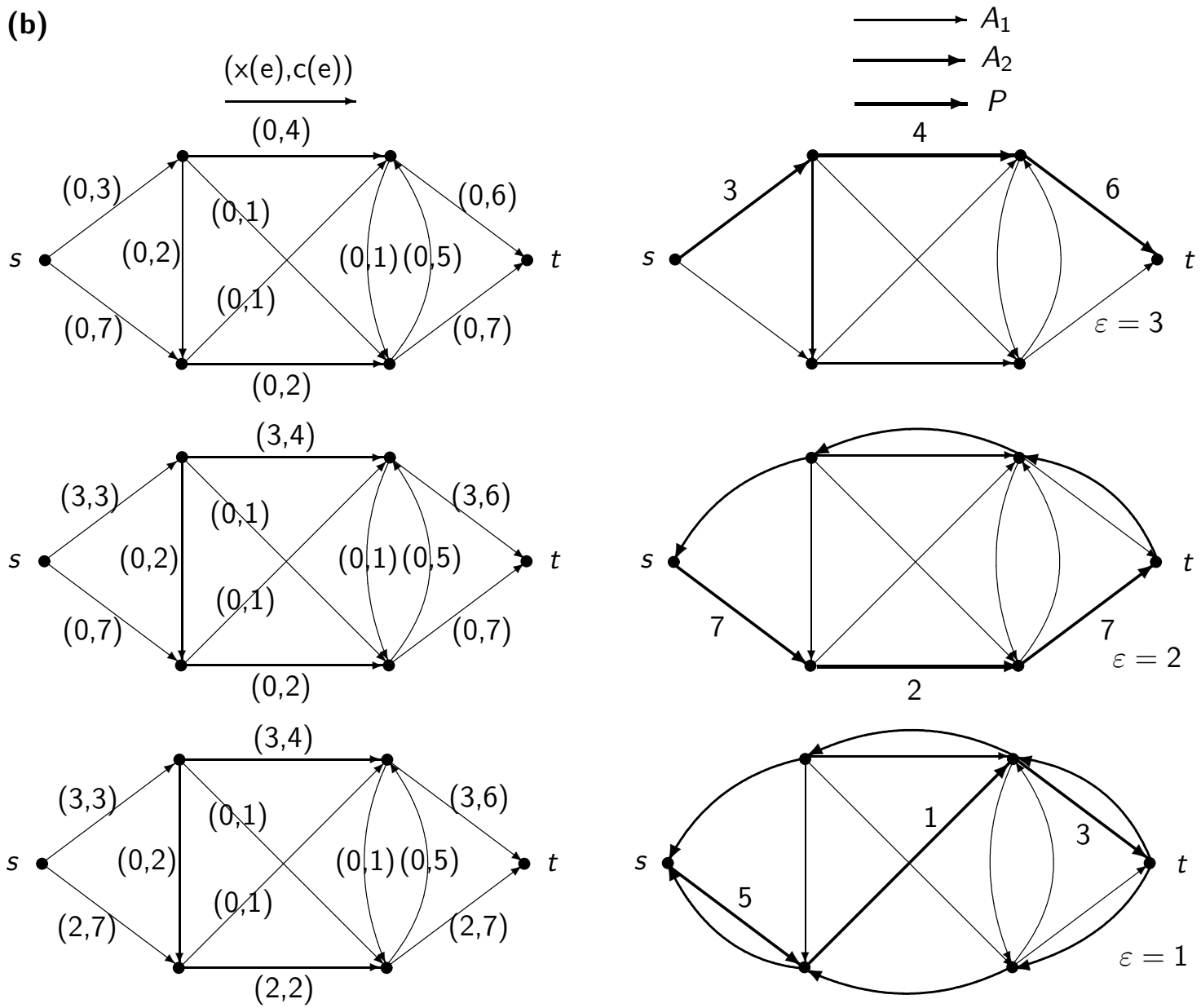




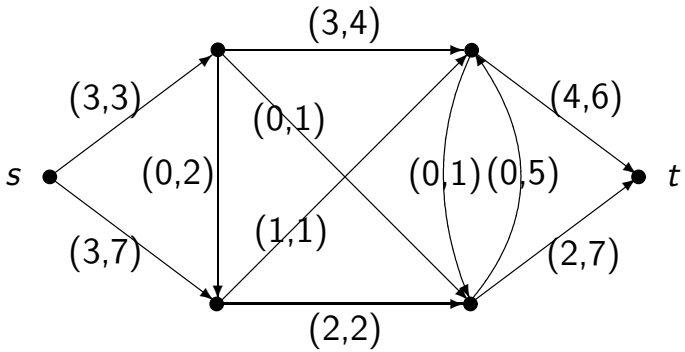


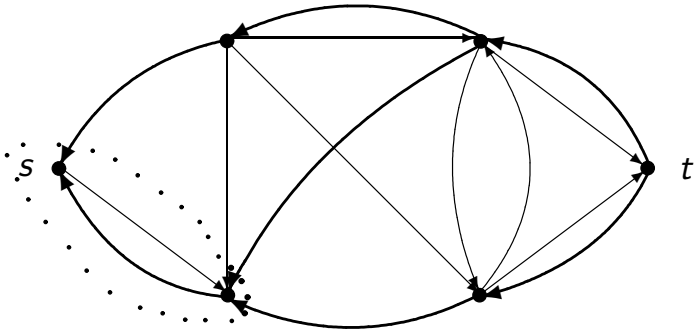


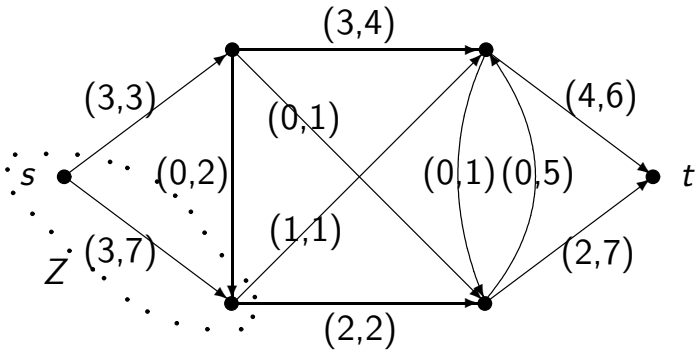
Exercice 3.4 : Solution de (b)



Exercice 3.4 : Solution de (b)







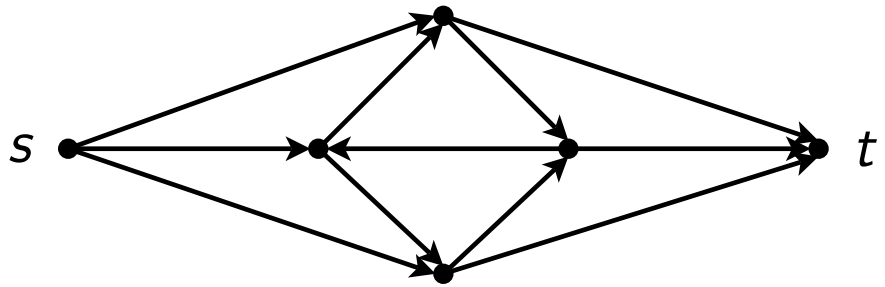
Exercice 3.6

Énoncé

Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté, $s, t \in V$ et $k \in \mathbb{Z}_+$ tels que

$$\begin{aligned} d^+(s) - d^-(s) &= k, \\ d^+(t) - d^-(t) &= -k, \\ d^+(v) - d^-(v) &= 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}. \end{aligned}$$

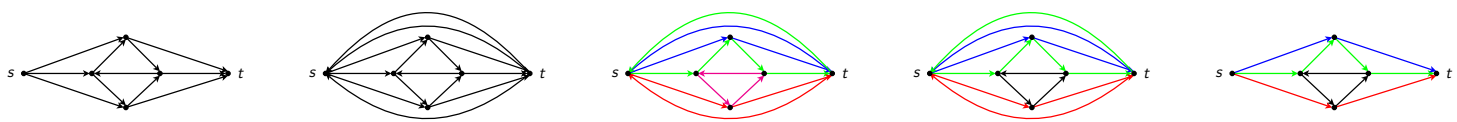
(a) Montrer que G possède k (s, t)-chemins arc-disjoints.
(b) Trouver trois (s, t)-chemins arc-disjoints dans le graphe orienté suivant.



Exercice 3.6

Solution

- Soit $G' := (V, A \cup \{e_i = ts : 1 \leq i \leq k\})$.

$$\begin{aligned} d^+_{G'}(s) - d^-_{G'}(s) &= d^+_G(s) - (d^-_G(s) + k) = k - k = 0, \\ d^+_{G'}(t) - d^-_{G'}(t) &= (d^+_G(s) + k) - d^-_G(s) = k - k = 0, \\ d^+_{G'}(v) - d^-_{G'}(v) &= d^+_G(v) - d^-_G(v) \qquad\qquad = 0 \ \forall v \neq s, t. \end{aligned}$$

- Par l'Exercice 1.11, $A(G')$ se décompose en circuits élémentaires.
- Soit C_i le circuit contenant l'arc e_i et $P_i := C_i - e_i \ \forall 1 \leq i \leq k$.
- $P_1, \ldots, P_k$ sont k (s,t)-chemins arc-disjoints.