Circulations

Etant donnés un graphe orienté $G = (V, A)$, deux vecteurs f et g sur les arcs tels que $f \leq g$, un vecteur x sur les arcs est une **circulation** si (1) est vérifiée, elle est **réalisable** si (2) est vérifiée.

$$d_x^+(v) = d_x^-(v) \qquad \forall v \in V, \tag{1}$$

$$f(e) \leq x(e) \leq g(e) \qquad \forall e \in A. \tag{2}$$

Exercice 4.1. — Soient G un graphe orienté et c un vecteur sur les arcs.

(a) Montrer que pour chaque pair $X, Y \subset V(G)$, $d_c(X)+d_c(Y) = d_c(X \cap Y)+d_c(X \cup Y)+d_c(X, Y)$.
(b) Soient X et Y deux coupes séparant s de t de capacité minimum. Montrer que $X \cap Y$ et $X \cup Y$ le sont aussi.

Exercice 4.2. — Montrer que x est une circulation dans G si et seulement si $d_x^+(Z) = d_x^-(Z) \ \ \forall Z \subset V$.

Exercice 4.3. — **Théorème de Hoffmann** : Etant donnés un graphe orienté $G = (V, A)$, deux vecteurs f et g sur les arcs tels que $f \leq g$, (G, f, g) admet une circulation réalisable si et seulement si

$$d_g^+(Z) \geq d_f^-(Z) \ \ \forall Z \subset V. \tag{3}$$

Exercice 4.4. — Le but de cet exercice est de démontrer que le théorème de Hoffmann implique le théorème de Ford-Fulkerson. Soient (G, g) un réseau et s, t deux sommets de G tels que $d^-(s) = 0 = d^+(t)$. Soit G' le graphe obtenu de G en ajoutant l'arc ts. Soient $f'(e) = 0$ et $g'(e) = g(e) \ \ \forall e \in A(G)$ et $f'(ts) = g'(ts) = M$, où M est la capacité minimum d'une coupe séparant s de t dans (G, g).

(a) Montrer que (G', f', g') admet une circulation réalisable x en utilisant le Théorème de Hoffmann.
(b) Montrer que dans (G, g), x_G est un flot réalisable de s à t de valeurs M.
(c) En déduire le Théorème de Ford-Fulkerson.

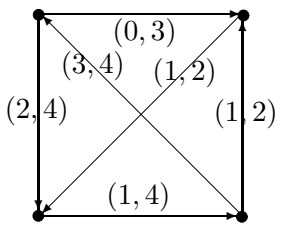
Exercice 4.5. — Le but de cet exercice est de démontrer que le théorème de Ford-Fulkerson implique le théorème de Hoffmann. Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté et f et g deux vecteurs sur les arcs tels que $f \leq g$. Soient $b(v) := d_f^+(v) - d_f^-(v) \ \ \forall v \in V$, et $b(Z) := \sum_{v \in Z} b(v) \ \ \forall Z \subset V$.

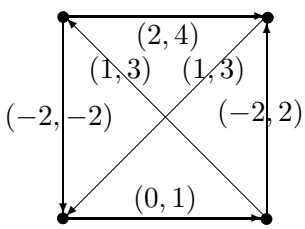
(a) Montrer que $b(Z) = d_f^+(Z) - d_f^-(Z) \ \ \forall Z \subset V$.
(b) Montrer que si $b(v) = 0 \ \ \forall v \in V$, alors f est une circulation réalisable de (G, f, g).
(c) Soient $S := \{v \in V : b(v) < 0\}$ et $T := \{v \in V : b(v) > 0\}$. Montrer que $-b(S) = b(T)$.

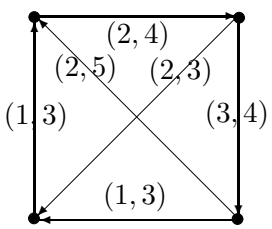
Soit (G', g') le réseau où G' est obtenu de G en ajoutant deux nouveaux sommets s et t, l'arc $sv \ \ \forall v \in S$ et l'arc $vt \ \ \forall v \in T$; $g'(sv) := -b(v) \ \ \forall v \in S$, $g'(vt) := b(v) \ \ \forall v \in T$ et $g'(e) := g(e) - f(e) \ \ \forall e \in A(G)$. Soit $M := -b(S) (= b(T))$.

(d) Montrer que si (3) est satisfaite alors il existe un flot réalisable x de s à t de valeurs M dans (G', g') en utilisant le Théorème de Ford-Fulkerson.
(e) Montrer que $x(sv) = -b(v) \ \forall v \in S$ et que $x(ut) = b(u) \ \forall u \in T$.
(f) Montrer que $f + x_G$ est une circulation réalisable de (G, f, g).
(g) En déduire le Théorème de Hoffmann.

Exercice 4.6. — Existe-t-il une circulation réalisable dans les réseaux suivants ?







Applications des flots et des circulations

Exercice 4.7. — (Exploitation d'une mine à ciel ouvert)

Le directeur d'une entreprise voudrait exploiter une mine à ciel ouvert en procédant à des extractions par blocs et en maximisant le profit. L'extraction d'un bloc n'est possible que si les blocs situés juste au-dessus de ce bloc sont déjà extraits. On connait par avance pour chaque bloc le profit de l'extraction de ce bloc. Cette valeur peut être positive ou négative, elle dépend du coût de l'extraction du bloc et de la richesse de son contenu. Modéliser ce problème par un problème de coupe minimum dans un réseau.

Exercice 4.8. — (Calcul distribué sur un ordinateur à deux processeurs)

On voudrait distribuer les modules d'un programme sur un ordinateur à deux processeurs en minimisant le coût total de traitement et de communication entre processeurs. On connait par avance d'une part pour chaque module le coût de son traitement sur chacun des deux processeurs et d'autre part pour chaque paire de modules le coût de communication entre processeurs si ces deux modules sont associés aux processeurs différents. Modéliser ce problème par un problème de coupe minimum dans un réseau.

Exercice 4.9. — (Segmentation des images)

Nous devons diviser une image en régions cohérentes, autrement dit, il nous faut distinguer les objets du fond de l'image. Chaque $i \in V$, où V est l'ensemble des pixels de l'image, appartient à un objet avec vraisemblance p_i et appartient au fond de l'image avec vraisemblance q_i. On a aussi une fonction $r(i,j)$ de pénalité de séparation pour chaque paire $(i,j) \in E$ où E est l'ensemble des paires de pixels voisins. Il s'agit de trouver une partition S, T de V qui maximise $\sum_{i \in S} p_i + \sum_{j \in T} q_j - \sum_{i \in S, j \in T, (i,j) \in E} r(i,j)$. Modéliser ce problème par un problème de coupe minimum dans un réseau.

Exercice 4.10. — (Arrondissement de matrice)

Étant donné une matrice réelle A, il nous faut arrondir chaque élément de A (vers le bas ou vers le haut) de manière à ce que la somme des éléments arrondis de chaque ligne (et colonne) soit égale à l'arrondi de la somme de la ligne (de la colonne). Modéliser ce problème par un problème de circulation dans un réseau.

Exercice 4.11. — (Ordonnancement d'avions)

Le chef d'une compagnie aérienne veut minimiser le nombre d'avions en effectuant tous les vols de la compagnie. Il connait bien sûr pour chaque vol toutes les informations, à savoir : la ville de départ et de destination et l'heure de départ et d'arrivé. Il connait aussi le temps de vol de n'importe quelle ville à n'importe quelle ville. Modéliser ce problème par un problème de circulation dans un réseau.

Exercice 4.12. — (Reconstruire le ventricule gauche du coeur à partir de projections de rayons X)

Pour diagnostiquer une possible maladie de coeur d'un patient, un docteur doit voir la forme 3-dimensionnelle du ventricule gauche du coeur. Évidemment, le problème se réduit à plusieurs problèmes 2-dimensionnels. En prenant les rayons X, on ne peut pas avoir directement l'image 2-dimensionnelle ; on aura plutôt deux projections 1-dimensionnelles de la densité de la région sur les deux axes. Le problème revient donc à construire une matrice binaire dont la somme de chaque ligne et de chaque colonne est connue. On suppose que pour chaque pixel de l'image, on connait une probabilité p_{ij} que le pixel appartient à la région cherchée. Modéliser ce problème par un problème de flots de coût minimum dans un réseau.