Optimisation Combinatoire 2A
Flots

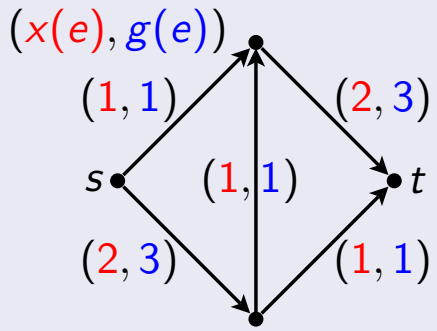
Zoltán Szigeti

Ensimag
INP Grenoble

Définition des flots

Définition

1. Étant donnés
   1. un graphe orienté $G = (V, A)$,
   2. $s, t \in V$ tels que $\delta^-(s) = \emptyset = \delta^+(t)$,
   3. une capacité non-négative g sur les arcs,



2. une fonction x sur les arcs est
   1. un **flot** de s à t si la **conservation du flot** est vérifiée :

$$\sum_{uv \in A} x(uv) = \sum_{vu \in A} x(vu) \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}.$$

   2. **réalisable** si la **contrainte de capacité** est vérifiée :

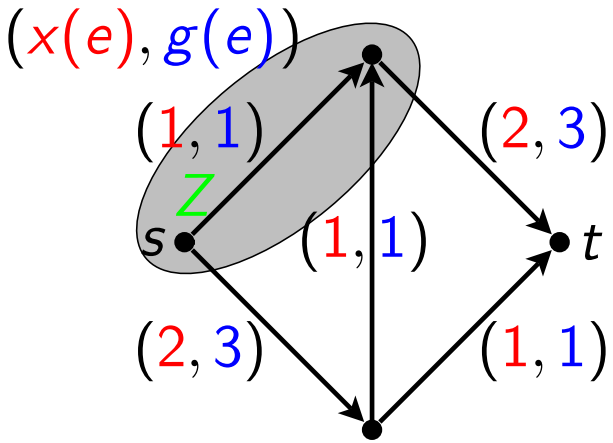
$$0 \leq x(e) \leq g(e) \quad \forall e \in A.$$

Notation

Notation

Étant donnés un graphe orienté G, une capacité g, un flot x, $Z \subseteq V(G)$,

1. **Valeur sortante de Z :** $d_x^+(Z) = \sum_{e \in \delta^+(Z)} x(e)$,
2. **Conservation du flot :** $d_x^-(v) = d_x^+(v)$,
3. **Valeur du flot :** $val(x) = d_x^+(s)$,
4. **(s,t)-coupe Z :** si $s \in Z \subseteq V \setminus t$,
5. **Capacité de (s,t)-coupe Z :** $cap(Z) = d_g^+(Z)$.



$d_x^+(Z) = 4$

$d_x^+(s) = 3$

$d_g^+(Z) = 6$

Valeur du flot

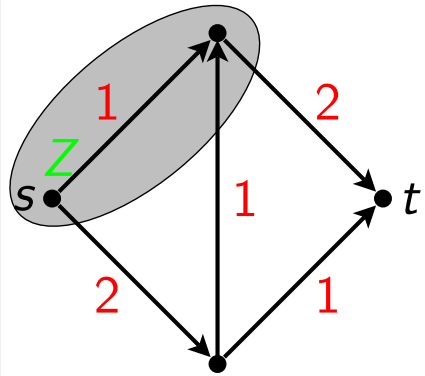
Lemme

Pour tout (s,t)-flot x et toute (s,t)-coupe Z :

$$\mathrm{val}(x) = d_x^+(Z) - d_x^-(Z).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
val(x) &= d_x^+(s) \\
&= d_x^+(s) - \ 0 \ + \sum_{v \in Z-s} 0 \\
&= d_x^+(s) - d_x^-(s) + \sum_{v \in Z-s} (d_x^+(v) - d_x^-(v)) \\
&= \sum_{v \in Z} (d_x^+(v) - d_x^-(v)) \\
&= d_x^+(Z) - d_x^-(Z).
\end{aligned}$$



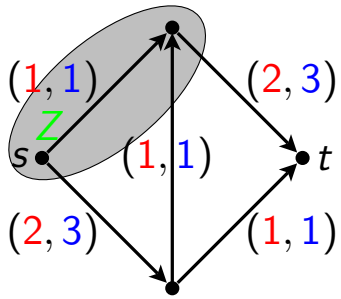
Flot max $\leq$ Coupe min

Lemme

Pour tout (s,t)-flot réalisable x et toute (s,t)-coupe Z : $\text{val}(x) \leq \text{cap}(Z)$.

Démonstration

$$\begin{aligned} val(x) &= d_x^+(Z) - d_x^-(Z) \\ &\leq d_g^+(Z) - d_0^-(Z) \\ &= d_g^+(Z) = cap(Z). \end{aligned}$$



Remarque

Si x est un (s,t)-flot réalisable et Z est une (s,t)-coupe tels que $\text{val}(x) = \text{cap}(Z)$, alors ils sont optimaux.

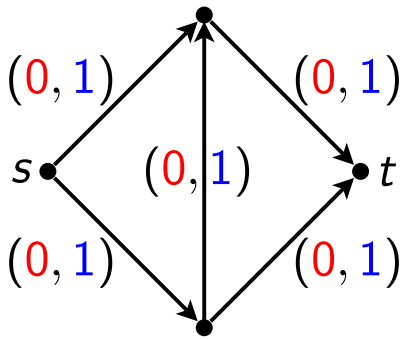
Problème

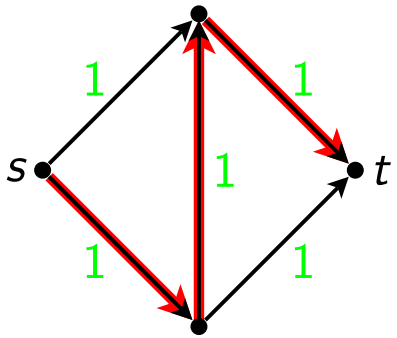
Trouver un (s,t)-flot réalisable de valeur maximum et une (s,t)-coupe de capacité minimum.

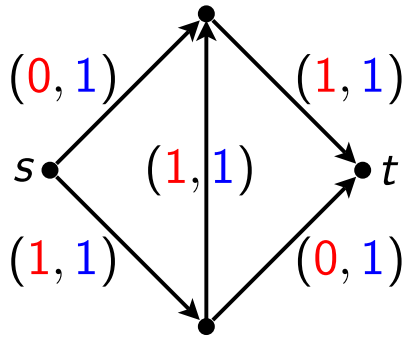
Augmentation du flot

Premières idées

1. $x(e) = 0$ $\forall e \in A$ est un flot réalisable.
2. Comment augmenter un flot ?
3. $G' := (V, A^1_x)$ où $A^1_x := \{uv \in A : x(uv) < g(uv)\}$.
4. S'il y a un (s,t)-chemin P dans G' alors on peut augmenter la valeur du flot par $\varepsilon^1_x := \min\{g(uv) - x(uv) : uv \in A(P) \cap A^1_x\}$,
5. $x'(uv) := \begin{cases} x(uv) + \varepsilon^1_x & \text{si } uv \in A(P) \cap A^1_x \\ x(uv) & \text{sinon.} \end{cases}$

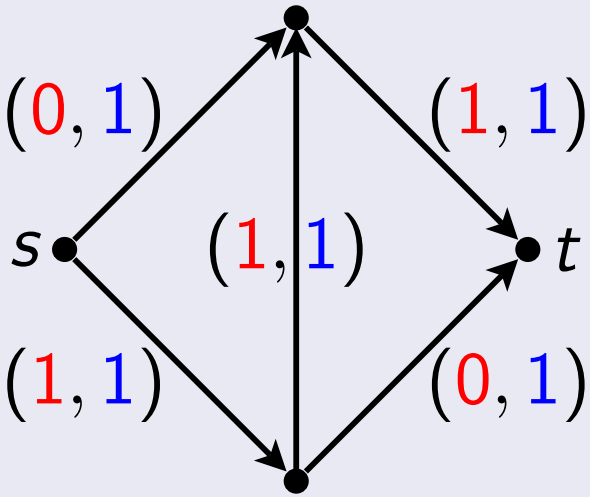


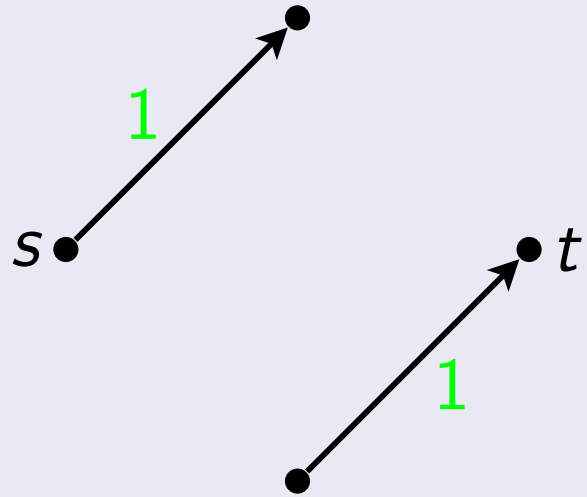




Augmentation du flot

Exemple: cette idée ne suffit pas



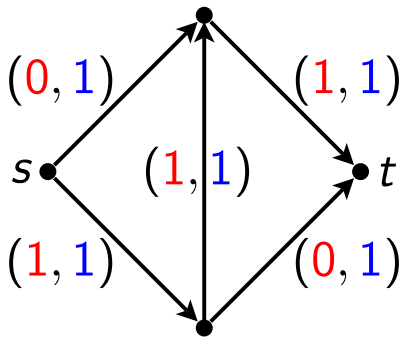


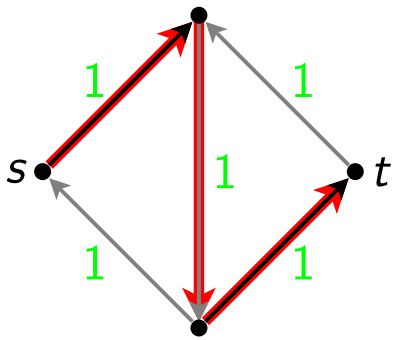
Ce flot n'est pas de valeur maximum et il n'y pas de (s, t)-chemin dans G'.

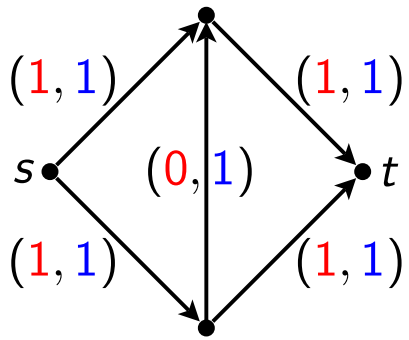
Augmentation du flot

Deuxième idée

1. Utiliser les arcs uv tels que $x(uv) > 0$ dans la direction inverse.
2. $G_x := (V, A_x^1 \cup A_x^2)$ où $A_x^2 := \{vu : uv \in A, x(uv) > 0\}$.
3. S'il y a un (s,t)-chemin P dans G_x alors on peut augmenter la valeur du flot par $\varepsilon_x := \min\{\varepsilon_x^1, \varepsilon_x^2\}$, où $\varepsilon_x^2 := \min\{x(uv) : vu \in A(P) \cap A_x^2\}$,
4. $$x'(uv) := \begin{cases} x(uv) + \varepsilon_x & \text{si } uv \in A(P) \cap A_x^1 \\ x(uv) - \varepsilon_x & \text{si } vu \in A(P) \cap A_x^2 \\ x(uv) & \text{sinon.} \end{cases}$$



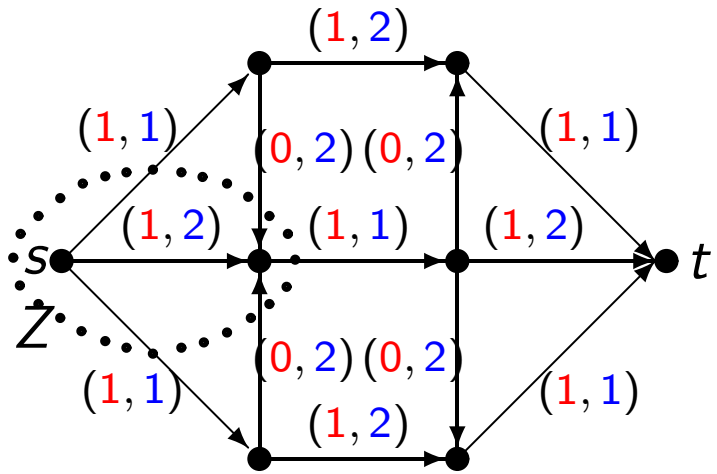




Théorème min-max

Théorème (Ford-Fulkerson)

1. Un (s,t)-flot réalisable x est de valeur maximum si et seulement si il n'existe pas de (s,t)-chemin dans G_x.
2. $\max\{val(x) : (s,t)\text{-flot réalisable } x\} = \min\{cap(Z) : (s,t)\text{-coupe } Z\}$.



Démonstration

Démonstration (Nécessité)

1. Supposons qu'il existe un (s,t)-chemin P dans G_x.
2. $x'(uv) := \begin{cases} x(uv) + \varepsilon_x & \text{si } uv \in A(P) \cap A_x^1 \\ x(uv) - \varepsilon_x & \text{si } vu \in A(P) \cap A_x^2 \\ x(uv) & \text{sinon.} \end{cases}$
3. x' est un (s,t)-flot réalisable de valeur $\text{val}(x) + \varepsilon_x > \text{val}(x)$.
   1. $\varepsilon_x > 0$,
   2. x' est un (s,t)-flot,
   3. x' est réalisable,
   4. $\text{val}(x') = \text{val}(x) + \varepsilon_x$.
4. x n'est pas donc de valeur maximum, contradiction.

Démonstration

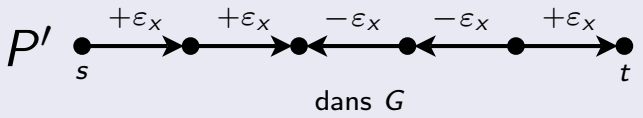
Démonstration (Nécessité)

1. $\varepsilon_x > 0$:
   1. $\forall uv \in A_x^1 : g(uv) - x(uv) > 0$ donc
      $\varepsilon_x^1 = \min\{g(uv) - x(uv) : uv \in A(P) \cap A_x^1\} > 0$,
   2. $\forall vu \in A_x^2 : x(uv) > 0$ donc
      $\varepsilon_x^2 = \min\{x(uv) : vu \in A(P) \cap A_x^2\} > 0$,
   3. $\varepsilon_x = \min\{\varepsilon_x^1, \varepsilon_x^2\} > 0$.

Démonstration

Démonstration (Nécessité)

2. x' est un (s,t)-flot :

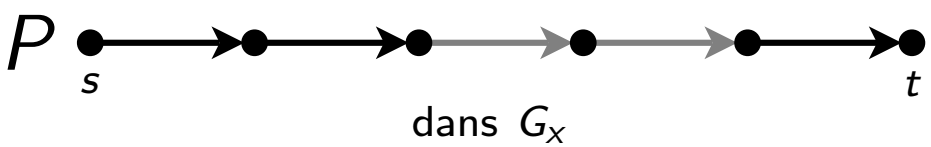


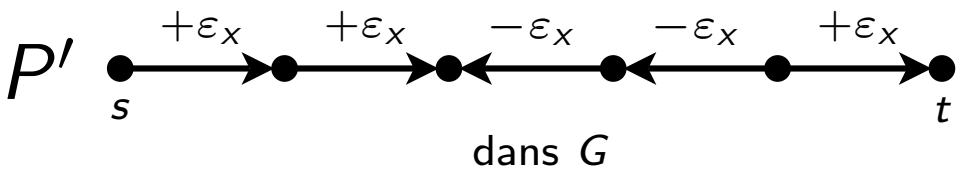
1. $x_{P'}(uv) := \begin{cases} +\varepsilon_x & \text{si } uv \in A(P) \cap A_x^1 \\ -\varepsilon_x & \text{si } vu \in A(P) \cap A_x^2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ est un (s,t)-flot.
2. $x' = x + x_{P'}$.
3. $$\begin{aligned} d^-_{x'}(v) - d^+_{x'}(v) &= d^-_{x+x_{P'}}(v) - d^+_{x+x_{P'}}(v) \\ &= (d^-_x(v) - d^+_x(v)) + (d^-_{x_{P'}}(v) - d^+_{x_{P'}}(v)) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$
4. x' est donc un (s,t)-flot.

Démonstration

Démonstration (Nécessité)

3. x' est réalisable : Puisque x était réalisable, $0 \leq x(uv) \leq g(uv)$.
   1. $e \in A \setminus A(P)$: $-x(e) \leq 0 = x_{P'}(e) = 0 \leq g(e) - x(e)$.
   2. $e \in A_x^1 \cap A(P)$: $-x(e) \leq 0 \leq \varepsilon_x = x_{P'}(e) = \varepsilon_x \leq \varepsilon_x^1 \leq g(e) - x(e)$.
   3. $\overleftarrow{e} \in A_x^2 \cap A(P)$: $-x(e) \leq -\varepsilon_x^2 \leq -\varepsilon_x = x_{P'}(e) = -\varepsilon_x \leq 0 \leq g(e) - x(e)$.
   4. $e \in A$: $0 \leq (x + x_{P'})(e) = x'(e) = (x + x_{P'})(e) \leq g(e)$.
   5. x' est donc réalisable.





Démonstration (Nécessité)

4. $\mathrm{val}(x') = \mathrm{val}(x) + \varepsilon_x$: Puisque $\delta_G^-(s) = \emptyset$, le premier arc su de P appartient à A_x^1 et donc à A.

$$val(x') = d^+_{x'}(s) = \sum_{sv \in \delta^+_G(s) \setminus su} x'(sv) + x'(su)$$

$$= \sum_{sv \in \delta^+_G(s) \setminus su} x(sv) + (x(su) + \varepsilon_x)$$

$$= d^+_x(s) + \varepsilon_x$$

$$= val(x) + \varepsilon_x.$$

Démonstration

Démonstration (Suffisance)

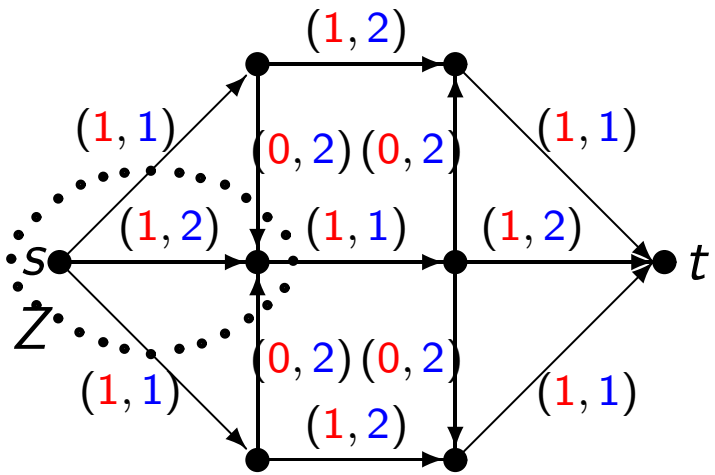
1. Supposons qu'il n'y a pas de (s,t)-chemin dans G_x.
2. $Z := \{v \in V : \exists \text{ un } (s,v)\text{-chemin dans } G_x\}$. $\Longrightarrow s \in Z \subseteq V \setminus t$ et
3. $\delta^+_{G_x}(Z) = \emptyset$. $\Longrightarrow$
4. $\forall uv \in \delta^+_G(Z) : x(uv) = g(uv)$ et,
5. $\forall uv \in \delta^-_G(Z) : x(uv) = 0$. $\Longrightarrow$
6. $cap(Z) = d^+_g(Z) = d^+_x(Z) - d^-_x(Z) = val(x) \leq$ *flot max.* $\leq$ *coupe min.* $\leq cap(Z)$, $\Longrightarrow$
7. On a égalité partout, en particulier le flot x est de valeur maximum et flot max. $=$ coupe min.

Algorithme

Algorithme d'Edmonds-Karp

Entrée : Réseau (G, g) tel que $g \geq 0$ et $s, t \in V$: $\delta^-(s) = \emptyset = \delta^+(t)$.

Sortie : (s, t)-flot réalisable x et (s, t)-coupe Z tels que $val(x) = cap(Z)$.



Algorithme

Etape 0: $x_0(e) = 0 \ \forall e \in A, \ i := 0$.

Etape 1: Construire le graphe auxiliaire $G_i := (V, A_i^1 \cup A_i^2)$ où
$A_i^1 := \{uv : uv \in A, x_i(uv) < g(uv)\}$ et
$A_i^2 := \{vu : uv \in A, x_i(uv) > 0\}$.

Etape 2: Appliquer l'algorithme Recherche en largeur d'abord sur G_i et s pour obtenir $Z_i \subseteq V$ et une s-arborescence F_i de $G_i[Z_i]$ tels que $\delta^+_{G_i}(Z_i) = \emptyset$.

Etape 3: Si $t \notin Z_i$ alors arrêter avec $x := x_i$ et $Z := Z_i$.

Etape 4: Sinon $P_i := F_i[s, t]$, le (s, t)-chemin unique dans F_i.

Etape 5: $\varepsilon_i^1 := \min\{g(uv) - x_i(uv) : uv \in A(P_i) \cap A_i^1\}$,
$\varepsilon_i^2 := \min\{x_i(uv) : vu \in A(P_i) \cap A_i^2\}$,
$\varepsilon_i := \min\{\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2\}$.

Etape 6: $$x_{i+1}(uv) := \begin{cases} x_i(uv) + \varepsilon_i & \text{si } uv \in A(P_i) \cap A_i^1 \\ x_i(uv) - \varepsilon_i & \text{si } vu \in A(P_i) \cap A_i^2 \\ x_i(uv) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etape 7: $i := i + 1$ et aller à l'Etape 1.

Complexité de l'algorithme

Théorème

L'algorithme d'Edmonds-Karp s'arrête en temps polynomial.

Remarque

1. Puisque à l'Etape 2 l'algorithme Recherche en largeur d'abord est appliqué, l'algorithme augment le flot toujours sur un plus court (s, t)-chemin dans G_x.
2. Si à l'Etape 2 l'algorithme Recherche en largeur d'abord est remplacé par l'algorithme de marquage orienté alors il se peut que l'algorithme ne s'arrête pas.

Flot entier

Théorème

Si $g(e)$ est entier pour chaque arc e de G, alors il existe un flot réalisable x de valeur maximum tel que $x(e)$ soit entier pour chaque arc e de G.

Démonstration

1. En exécutant l'algorithme d'Edmond-Karp on voit par récurrence sur i que chaque $x_i(e)$ est entier:
2. Pour $i = 0, x_0(e) = 0$ est entier $\forall e \in A$.
3. Supposons que c'est vrai pour i.
4. $\varepsilon_i = \min\{\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2\}$ est entier :
   1. $\varepsilon_i^1 = \min\{g(uv) - x_i(uv) : uv \in A(P_i) \cap A_i^1\}$ est entier : chaque $g(e) - x_i(e)$ est entier.
   2. $\varepsilon_i^2 = \min\{x_i(uv) : vu \in A(P_i) \cap A_i^2\}$ est entier : chaque $x_i(e)$ est entier.
5. $x_{i+1}(e), =$ soit $x_i(e)$ soit $x_i(e) + \varepsilon_i$ soit $x_i(e) - \varepsilon_i$, est entier $\forall e \in A$.

Applications

Citation

"Knowledge is useless without consistent application." - Julian Hall

Applications des flots entiers

1. Théorème de Menger sur l'arc-connexité,
2. Théorème de Kőnig sur les couplages.

Applications des flots et des coupes

1. Exploitation d'une mine à ciel ouvert,
2. Calcul distribué sur un ordinateur à deux processeurs,
3. Segmentation des images.