Flots

Etant donnés un graphe orienté $G = (V, A)$, $s, t \in V$ tels que $\delta^-(s) = \emptyset = \delta^+(t)$, une capacité non-négative g sur les arcs, une fonction x sur les arcs est un **flot** de s à t si (1) est vérifiée et elle est **réalisable** si (2) est vérifiée. On note $\boldsymbol{val(x)}= d_x^+(s)$ et pour $Z \subset V$ tel que $s \in Z,\ t \notin Z$, $\boldsymbol{cap(Z)}= d_g^+(Z)$.

$$d_x^+(v) = d_x^-(v) \qquad \forall v \in V \setminus \{s, t\}, \tag{1}$$

$$0 \leq x(e) \leq g(e) \qquad \forall e \in A. \tag{2}$$

Exercice 3.1. — Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté, $s, t \in V$ tels que $\delta^-(s) = \emptyset = \delta^+(t)$, g une capacité non-négative sur les arcs, $Z \subset V$ tel que $s \in Z,\ t \notin Z$ et x un flot de s à t.

(a) Montrer que $d_x^+(Z) - d_x^-(Z) = d_x^+(s)$.

(b) Montrer que si x est réalisable, alors $val(x) \leq cap(Z)$.

Exercice 3.2. — **(Théorème de Ford-Fulkerson)** Pour un graphe orienté $G = (V, A)$, deux sommets $s, t \in V$, une capacité g sur A et un flot réalisable x de s à t, on introduit un graphe auxiliaire $G_x := (V, A_x)$, où $A_x := A_x^1 \cup A_x^2$ avec $A_x^1 := \{uv \in A : x(uv) < g(uv)\}$ et $A_x^2 := \{vu : uv \in A, x(uv) > 0\}$.

(a) Montrer que x est un flot réalisable de s à t de valeur maximum si et seulement si il n'existe pas de chemin de s à t dans G_x.

(b) Montrer que $\max\{val(x) : x \text{ flot réalisable de } s \text{ à } t\} = \min\{cap(Z) : s \in Z, t \notin Z\}$.

Exercice 3.3. — (**Justification de l'algorithme de Edmonds-Karp**)

Algorithme de Edmonds-Karp :
Entrée : $(G = (V, A), g)$ réseau tel que $g \geq 0$ et $s, t \in V$ tels que $\delta^-(s) = \emptyset = \delta^+(t)$.
Sortie : Un flot réalisable x de s à t et une coupe $\delta^+(Z)$ séparant s de t tels que $val(x) = cap(Z)$.

Etape 0 : $x_0(e) = 0\ \forall e \in A,\ i := 0$.
Etape 1 : Construire le graphe auxiliaire $G_i := (V, A_i^1 \cup A_i^2)$ où
$A_i^1 := \{uv : uv \in A, x_i(uv) < g(uv)\}$ et $A_i^2 := \{vu : uv \in A, x_i(uv) > 0\}$.
Etape 2 : Appliquer l'algorithme Recherche en largeur d'abord sur G_i et s pour obtenir $Z_i \subseteq V$ et une s-arborescence F_i de $G_i[Z_i]$ tels que $\delta^+_{G_i}(Z_i) = \emptyset$.
Etape 3 : Si $t \notin Z_i$ alors arrêter avec $x := x_i$ et $Z := Z_i$.
Etape 4 : Sinon soit P_i le chemin unique dans F_i de s à t.
Etape 5 : Soient $\varepsilon_i^1 := \min\{g(uv) - x_i(uv) : uv \in A(P_i) \cap A_i^1\}$,
$\varepsilon_i^2 := \min\{x_i(uv) : vu \in A(P_i) \cap A_i^2\}$,
$\varepsilon_i := \min\{\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2\}$.
Etape 6 : Soit $x_{i+1}(uv) := \begin{cases} x_i(uv) + \varepsilon_i & \text{si } uv \in A(P_i) \cap A_i^1 \\ x_i(uv) - \varepsilon_i & \text{si } vu \in A(P_i) \cap A_i^2 \\ x_i(uv) & \text{sinon.} \end{cases}$
Etape 7 : Soit $i := i + 1$ et aller à l'Etape 1.

(a) Montrer que, à l'Etape 5, $\varepsilon_i > 0$.

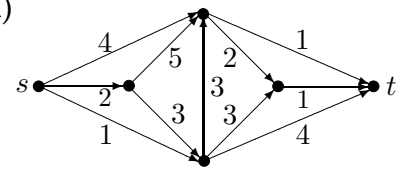
(b) Montrer que, à l'Etape 6, x_{i+1} est un flot de s à t.

(c) Montrer que, à l'Etape 6, x_{i+1} est (un flot) réalisable.

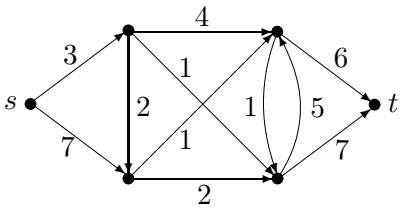
(d) Montrer que, à l'Etape 3, x est un flot réalisable de s à t de valeur maximum et $\delta^+(Z)$ est une coupe séparant s et t de capacité minimum.

Exercice 3.4. — Déterminer un flot réalisable de s à t de valeur maximum et une coupe séparant s de t de capacité minimum dans les réseaux suivants :

(a)



(b)

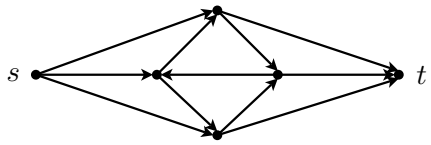


Exercice 3.5. — Montrer que si $g(e)$ est entier pour chaque arc e de G, alors il existe un flot réalisable de valeur maximum x tel que $x(e)$ soit entier pour chaque arc e de G.

Exercice 3.6. — Soient $G = (V, A)$ un graphe orienté et $s, t \in V$ tels que

$$d^+(s) - d^-(s) = k, \tag{3}$$
$$d^+(t) - d^-(t) = -k, \tag{4}$$
$$d^+(v) - d^-(v) = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}. \tag{5}$$

(a) Montrer que G possède k chemins arc-disjoints de s à t.
(b) Trouver trois chemins arc-disjoints de s à t dans le graphe orienté suivant.



Exercice 3.7. — Le but de cet exercice est de démontrer le **Théorème de Menger :**

Etant donnés un graphe orienté $G = (V, A)$ et deux sommets $s, t \in V$, le nombre **max**imum de chemins arc disjoints de s à t est égal au cardinal **min**imum d'une coupe $\delta^+(Z)$ séparant s de t.

Soit $G' = G - \delta^+(t) - \delta^-(s)$ et soit $g(e) = 1$ pour chaque arc e de G'.

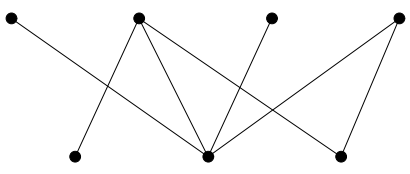
(a) Montrer que **max** = la valeur maximum d'un flot réalisable de s à t dans G'.
(b) Montrer que **min** = la capacité minimum d'une coupe séparant s de t dans G'.
(c) En déduire le théorème de Menger.

Exercice 3.8. — Le but de cet exercice est de démontrer le **Théorème de Kőnig :**

Etant donné un graphe biparti $G = (U, V; E)$, le cardinal maximum d'un couplage de G est égal au cardinal minimum d'un ensemble transversal de G.

On construit un réseau (D, g) où $V(D) = U \cup V \cup \{s, t\}$, $A(D) = \{su : u \in U\} \cup \{vt : v \in V\} \cup \{uv : u \in U, v \in V, uv \in E\}$, $g(su) = 1$ $\forall u \in U$, $g(vt) = 1$ $\forall v \in V$ et $g(uv) = |U| + 1$ $\forall uv \in E$.

Soient x un flot réalisable entier de valeur maximum de s à t dans D, $\delta^+(Z)$ une coupe séparant s de t de capacité minimum dans D, $M := \{uv \in E : x(uv) = 1\}$ et $T := (U - Z) \cup (V \cap Z)$.

(a) Montrer que M est un couplage de G tel que $|M| = val(x)$.
(b) Montrer que T est un ensemble transversal de G tel que $|T| = cap(Z)$.
(c) En déduire le Théorème de Kőnig.

Exercice 3.9. — Déterminer un couplage maximum et un ensemble transversal minimum dans le graphe suivant :