Optimisation Combinatoire 2A
Applications des plus courts chemins, Introduction au problème du flot

Zoltán Szigeti

Ensimag
INP Grenoble

Applications des plus courts chemins

Problème de gravitation

"Tout poids souhaite tomber vers le centre du monde par le plus court chemin."
Leonardo de Vinci

Problème de société

"Le chemin le plus court entre deux êtres est le sourire." Leonardo de Vinci

Applications des plus courts chemins

Problème du sac à dos

1. Etant donnés
   1. un sac à dos de volume K et
   2. des objets O_i de volume c_i et d'utilité u_i $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$,
2. il faut choisir quelques uns des objets de telle sorte que
   1. la somme de leurs volumes soit inférieure ou égale à K et
   2. que la somme de leurs utilités soit maximum, qu'on note $S(\ell, K)$.

Solution par programmation dynamique

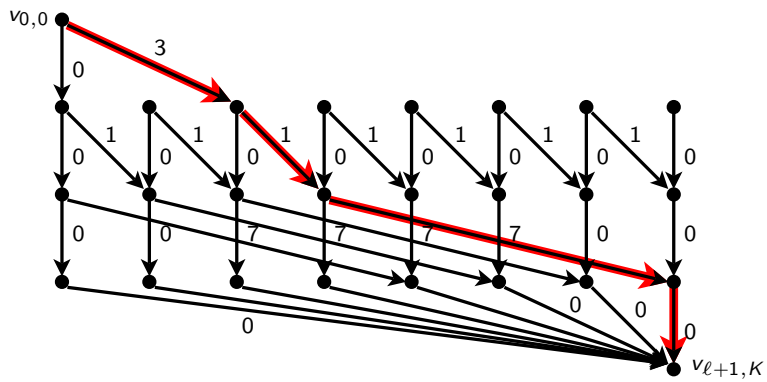
1. $S(i, j)$: valeur optimale quand on ne peut prendre que les i premiers objets et le volume du sac à dos est j.
2. Formule recursive : $S(i, j) = \max\{S(i-1, j), S(i-1, j-c_i) + u_i\}$.

Applications des plus courts chemins

Modélisation

1. $(G := (V, A), c)$ (sans circuit) où
   1. $V := \{v_{i,j} : 1 \leq i \leq \ell,\ 0 \leq j \leq K\} \cup \{v_{0,0}, v_{\ell+1,K}\}$ et
   2. $A := \cup_{i=0}^{\ell} A_i \cup_{i=0}^{\ell-1} A'_i$ où
      1. $A_0 := v_{0,0}v_{1,0}$, $A_i := \{v_{i,j}v_{i+1,j} : 0 \leq j \leq K\}$ $(1 \leq i \leq \ell - 1)$,
      2. $A'_0 := v_{0,0}v_{1,c_1}$, $A'_i := \{v_{i,j}v_{i+1,j+c_{i+1}} : 0 \leq j \leq K - c_{i+1}\}$ $(1 \leq i \leq \ell - 1)$,
      3. $A_\ell := \{v_{\ell,j}v_{\ell+1,K} : 0 \leq j \leq K\}$.
   3. $c(e) := \begin{cases} 0 & \text{si } e \in \cup_{i=0}^{\ell} A_i \\ u_{i+1} & \text{si } e \in A'_i. \end{cases}$
2. On cherche un plus long chemin de $s := v_{0,0}$ à $t := v_{\ell+1,K}$.

Objets	sac	O_1	O_2	O_3
Volumes	7	2	1	4
Valeurs	?	3	1	7



Applications des plus courts chemins

Problème du sac à dos

1. Etant donnés
   1. un sac à dos de volume K et
   2. des objets O_i : de volume c_i et d'utilité u_i $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$,
2. il faut choisir quelques uns des objets de telle sorte que
   1. la somme de leurs volumes soit inférieure ou égale à K et
   2. que la somme de leurs utilités soit maximum.

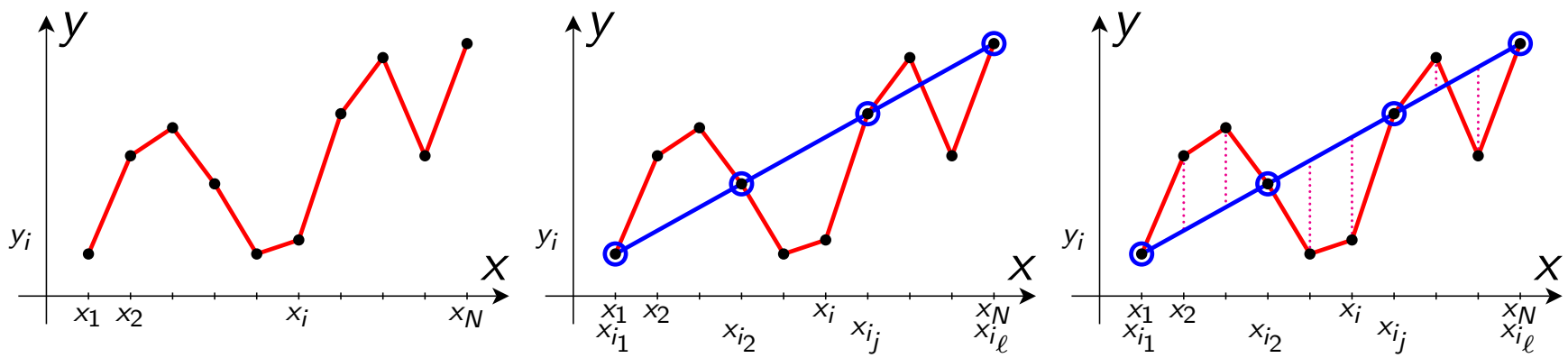
Remarque

1. Taille du problème : $log(K) + \ell(log(C) + log(U))$.
2. Taille du graphe : $|V| = \ell(K + 1) + 2$.
3. La taille du graphe est exponentielle en la taille du problème !
4. Cette solution n'est pas acceptable théoriquement !

Applications des plus courts chemins

Approximation d'une fonction linéaire par morceaux:

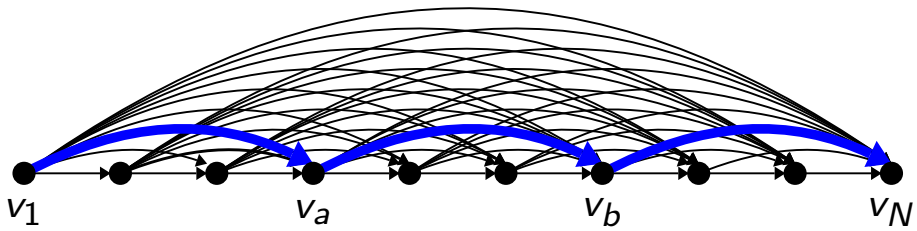
- Soit $f_1(x)$ une fonction linéaire par morceaux définie par N points successifs (x_i, y_i) où $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$.
- En choisissant certains de ces points (de l'indice $1 = i_1 < \cdots < i_j < \cdots < i_\ell = N$) on a une autre fonction linéaire par morceaux $f_2(x)$
  - dont le stockage est moins coûteux mais
  - dont l'erreur de précision est plus coûteuse.
- Il s'agit de trouver une telle approximation $f_2(x)$ de $f_1(x)$ de coût minimum où
  - le coût de $f_2(x)$ est $\sum_{j=2}^{\ell}(\alpha + \beta \sum_{k=i_{j-1}}^{i_j} |f_1(x_k) - f_2(x_k)|)$.

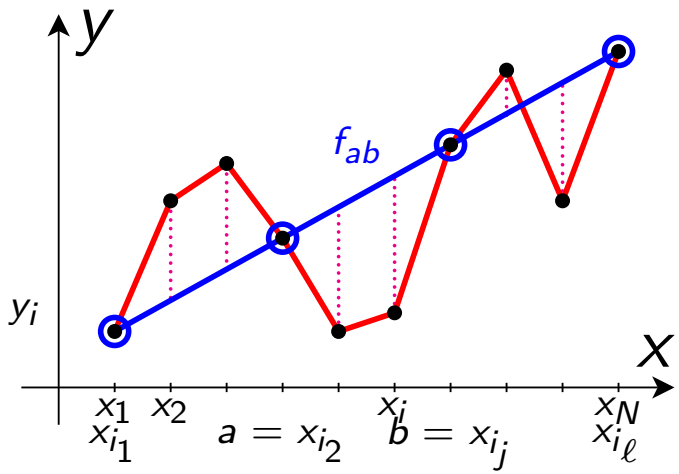


Applications des plus courts chemins

Solution

1. $(G := (V, A), c)$ où
   1. $V := \{v_1, \ldots, v_N\}$ et
   2. $A := \{v_a v_b : 1 \leq a < b \leq N\}$,
   3. $c(v_a v_b) := \alpha + \beta \sum_{k=a+1}^{b-1} |f_1(x_k) - f_{ab}(x_k)|$.
2. On cherche un plus court (v_1, v_N)-chemin.

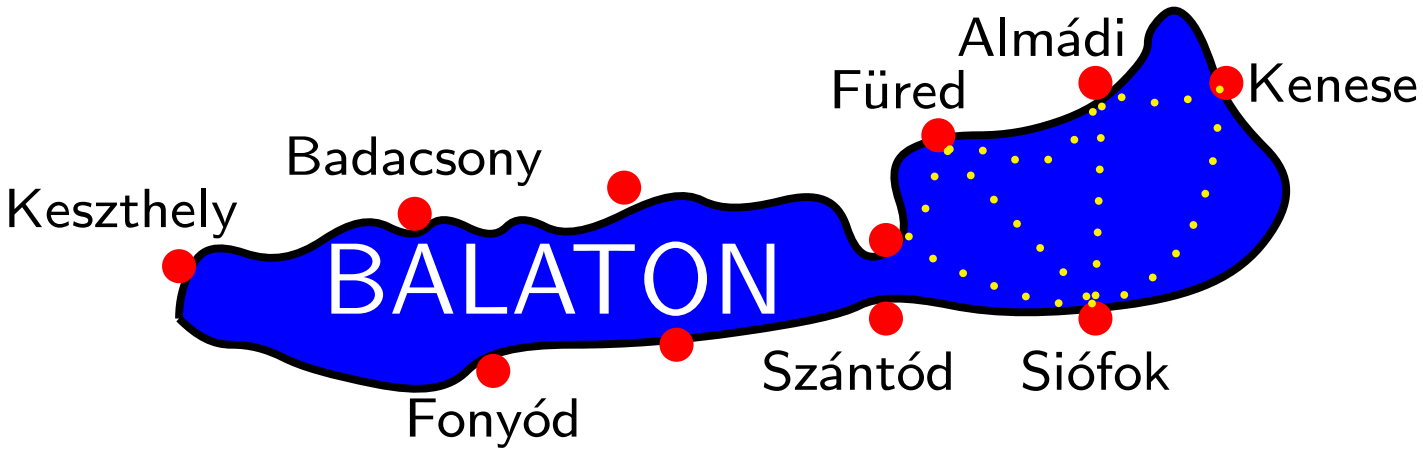




Applications des plus courts chemins

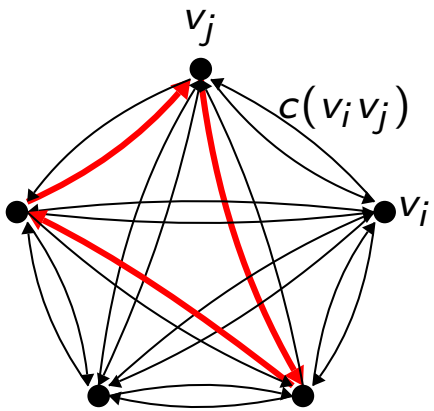
Transport maritime:

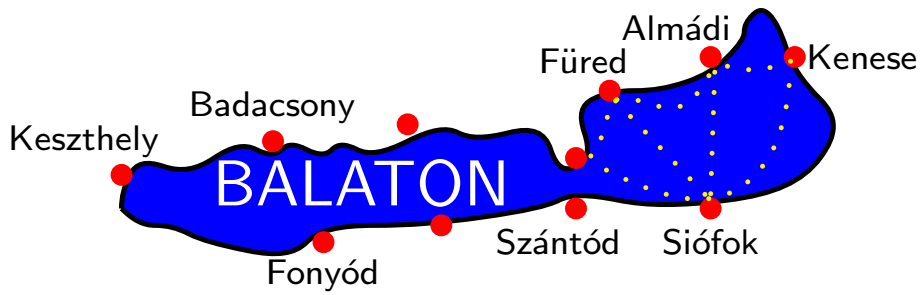
Une compagnie maritime offre des transports réguliers entre les différentes villes autour du Lac Balaton en Hongrie. On sait que le voyage de la ville i à la ville j dure t_{ij} minutes et rapporte p_{ij} Forints. Le rapport moyen d'une tournée C est $\frac{\sum_{ij \in C} p_{ij}}{\sum_{ij \in C} t_{ij}}$. Le problème du directeur de la compagnie est de décider s'il existe une tournée (un circuit) dont le rapport moyen est supérieur à une valeur fixée R.



Solution

1. $(G := (V, A), c)$ où
   1. $V := \{\text{les villes autour de Balaton}\}$,
   2. $A := \{v_i v_j, v_j v_i : v_i, v_j \in V\}$,
   3. $c(v_i v_j) := Rt_{ij} - p_{ij}$.
2. On cherche un circuit C tel que
   1. $\frac{\sum_{ij \in C} p_{ij}}{\sum_{ij \in C} t_{ij}} > R \iff$
   2. $0 > \sum_{v_i v_j \in A(C)} (Rt_{ij} - p_{ij}) = \sum_{v_i v_j \in A(C)} c(v_i v_j) = c(C) \iff$
   3. il est absorbant.





Applications des plus courts chemins

Système d'inéquations formé de différences:

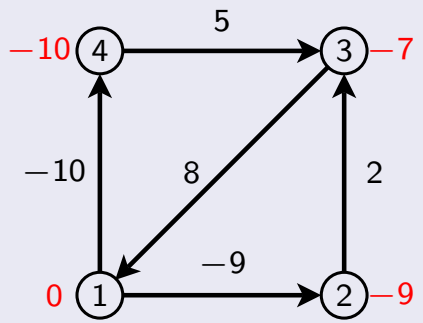
Étant donné un système d'inéquations dont toutes les inégalités sont de la forme $x_{j_k} - x_{i_k} \leq b_k$, décider s'il existe une solution.

1. Si oui, trouver une telle solution et
2. si non, trouver les contraintes contradictoires.

Exemple

$$\begin{aligned} x_3 - x_4 &\leq 5 \\ x_4 - x_1 &\leq -10 \\ x_1 - x_3 &\leq 8 \\ x_2 - x_1 &\leq -9 \\ x_3 - x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Potentiel



Solution

$$\begin{aligned} -7 - (-10) &\leq 5 \\ -10 - 0 &\leq -10 \\ 0 - (-7) &\leq 8 \\ -9 - 0 &\leq -9 \\ -7 - (-9) &\leq 2 \end{aligned}$$

Applications des plus courts chemins

Système d'inéquations formé de différences:

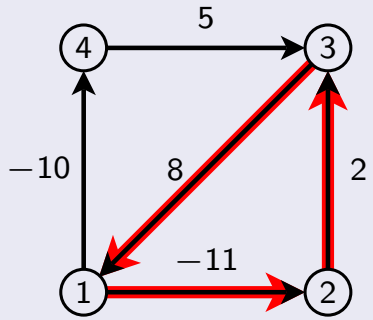
Étant donné un système d'inéquations dont toutes les inégalités sont de la forme $x_{j_k} - x_{i_k} \leq b_k$, décider s'il existe une solution.

1. Si oui, trouver une telle solution et
2. si non, trouver les contraintes contradictoires.

Exemple

$$\begin{aligned} x_3 - x_4 &\leq 5 \\ x_4 - x_1 &\leq -10 \\ x_1 - x_3 &\leq 8 \\ x_2 - x_1 &\leq -11 \\ x_3 - x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Circuit absorbant



Contradiction

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &\leq 8 \\ x_2 - x_1 &\leq -11 \\ x_3 - x_2 &\leq 2 \\ \hline 0 &\leq -1 \end{aligned}$$

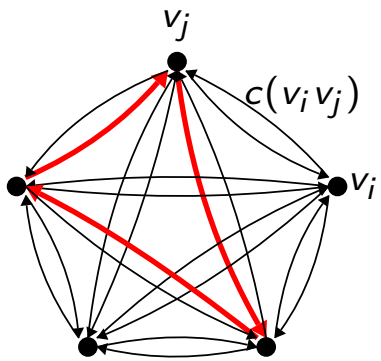
Applications des plus courts chemins

Échanges de devises

Etant donnés les taux de change t_{ij} pour tout couple de devises i et j, peut-on trouver une série d'échanges de devises pour gagner de l'argent?

Définition : réseau de devises $(G = (V, A), c)$:

1. $V := \{v_1, \ldots, v_n\}$ où v_i correspond à la devise i,
2. $A := \{v_i v_j$: tout couple (i, j) de devises$\}$,
3. $c(v_i v_j) := -log(t_{ij})$.



Solution

Il s'agit de trouver un circuit absorbant C dans le réseau (G, c), puisque

$$1 < \prod_{v_i v_j \in C} t_{ij} \iff 0 > -log(\prod_{v_i v_j \in C} t_{ij}) = \sum_{v_i v_j \in C} -log(t_{ij}) = \sum_{v_i v_j \in C} c(v_i v_j) = c(C).$$

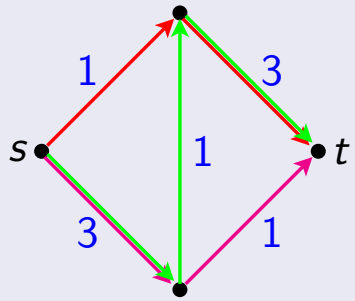
Introduction aux flots

Problème

Combien de camions peut-on envoyer d'un point de départ à un point de destination en respectant les contraintes de capacité des rues ?

Modélisation

1. Étant donnés
   1. un graphe orienté $G = (V, A)$,
   2. départ $s \in V$ et destination $t \in V$,
   3. une capacité g sur chaque arc,

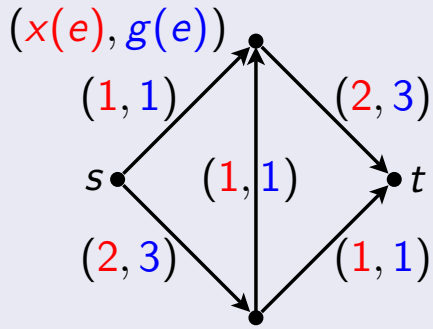


2. trouver un ensemble $\mathcal{P}$ de (s, t)-chemins tels que chaque arc e appartienne à au plus $g(e)$ chemins de $\mathcal{P}$.
3. On verra qu'il suffit de savoir le nombre $x(e)$ de chemins contenant e pour chaque arc e.
4. Cette fonction $x : A \to \mathbb{R}$ s'appelle flot.

Définition des flots

Définition

1. Étant donnés
   1. un graphe orienté $G = (V, A)$,
   2. $s, t \in V$ tels que $\delta^-(s) = \emptyset = \delta^+(t)$,
   3. une capacité non-négative g sur les arcs,



2. une fonction x sur les arcs est
   1. un **(s, t)-flot** si la **conservation du flot** est vérifiée :

$$\sum_{uv \in A} x(uv) = \sum_{vu \in A} x(vu) \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}.$$

   2. **réalisable** si la **contrainte de capacité** est vérifiée :

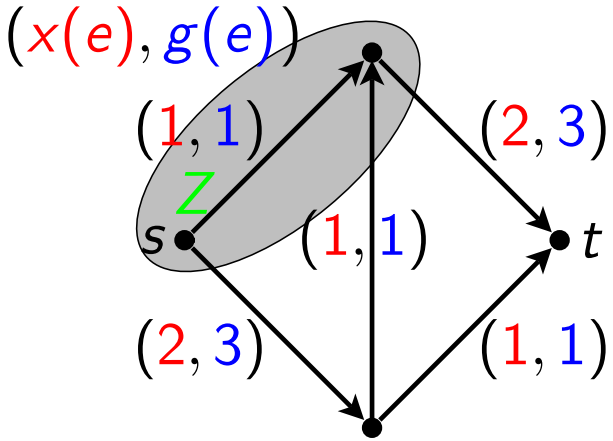
$$0 \leq x(e) \leq g(e) \quad \forall e \in A.$$

Notation

Notation

Étant donnés un graphe orienté G, une capacité g, un flot x, $Z \subseteq V(G)$,

1. **Valeur sortante de Z :** $d_x^+(Z) = \sum_{e \in \delta^+(Z)} x(e)$,
2. **Conservation du flot :** $d_x^-(v) = d_x^+(v)$,
3. **Valeur du flot :** $val(x) = d_x^+(s)$,
4. **(s,t)-coupe Z :** si $s \in Z \subseteq V \setminus t$,
5. **Capacité de (s,t)-coupe Z :** $cap(Z) = d_g^+(Z)$.



$d_x^+(Z) = 4$

$d_x^+(s) = 3$

$d_g^+(Z) = 6$

Valeur du flot

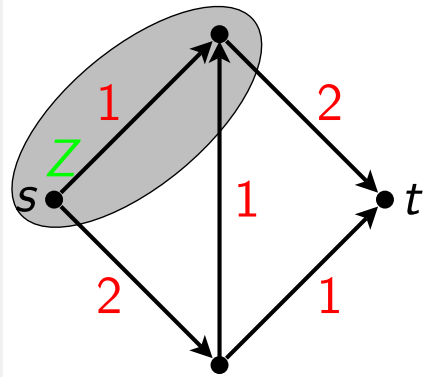
Lemme

Pour tout (s,t)-flot x et toute (s,t)-coupe Z :

$$\mathrm{val}(x) = d_x^+(Z) - d_x^-(Z).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
val(x) &= d_x^+(s) \\
&= d_x^+(s) - \ 0 \ + \sum_{v \in Z-s} 0 \\
&= d_x^+(s) - d_x^-(s) + \sum_{v \in Z-s} (d_x^+(v) - d_x^-(v)) \\
&= \sum_{v \in Z} (d_x^+(v) - d_x^-(v)) \\
&= d_x^+(Z) - d_x^-(Z).
\end{aligned}$$

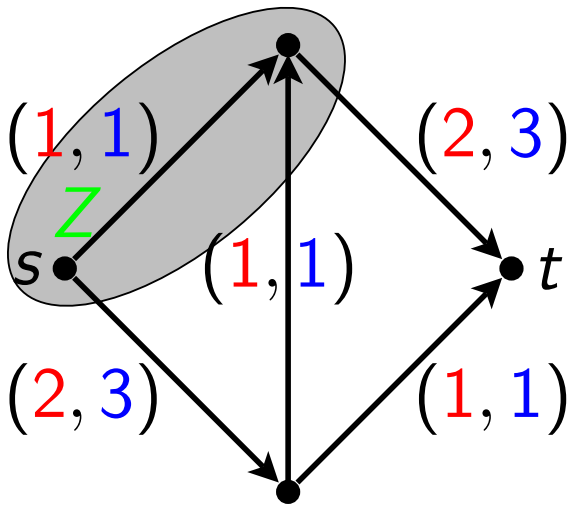


Flot max $\leq$ Coupe min

Lemme

Pour tout (s,t)-flot réalisable x et toute (s,t)-coupe Z :

$$\text{val}(x) \leq \text{cap}(Z).$$

Démonstration

$$\begin{aligned} val(x) &= d_x^+(Z) - d_x^-(Z) \\ &\leq d_g^+(Z) - d_0^-(Z) \\ &= d_g^+(Z) \\ &= cap(Z). \end{aligned}$$