Optimisation Combinatoire 2A
Plus courts chemins

Zoltán Szigeti

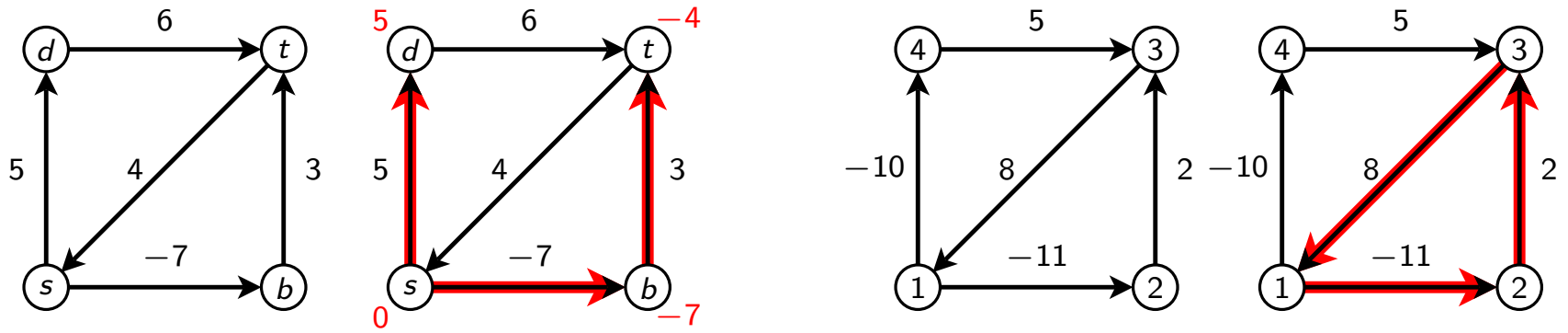
Ensimag
INP Grenoble

Algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig

Algorithme

Entrée : un réseau (G, c) et une racine s de G.
Sortie : l'un et un seul des suivants :

1. une s-arborescence F de G dont le chemin unique à partir de s à chaque sommet v est un plus court (s, v)-chemin dans (G, c),
2. un circuit absorbant.

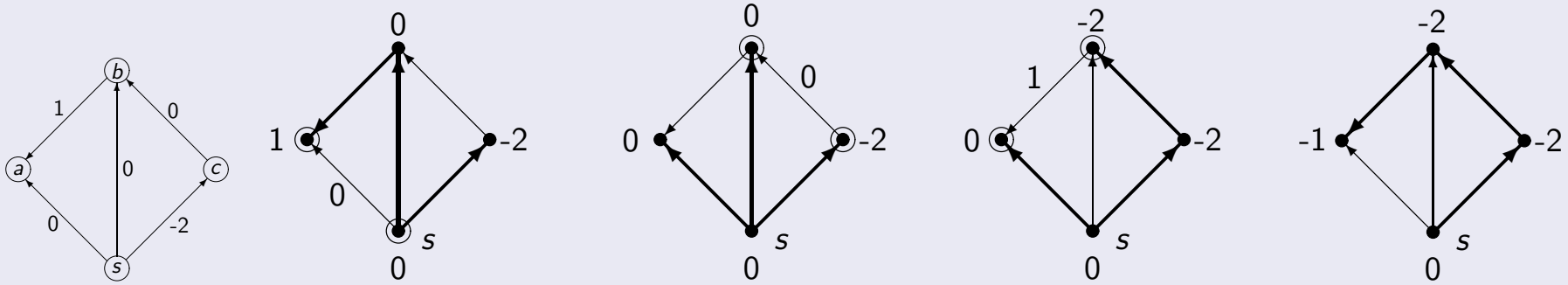


Algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig

Algorithme

1. On commence avec une s-arborescence F quelconque de G (algorithme de marquage orienté peut en fournir une.)
2. Si les distances à partir de s dans l'arborescence F forment un potentiel dans (G, c) alors on s'arrête (F est l'arborescence cherchée).
3. Sinon, on a un arc uv de G qui viole la condition :
   1. Si $F \cup uv$ contient un circuit C, alors on s'arrête (C est absorbant).
   2. Sinon, $F + uv - F(v)$ est une meilleur arborescence et on va à 2.

Exemple



Exercice 2.1

ALGORITHME DE FORD-FULKERSON-DANTZIG :

ENTRÉE : $(G = (V, A), c)$ réseau et une racine s de G.

SORTIE : (i) Soit une s-arborescence F de G tq $\forall v \in V$, le (s, v)-chemin unique dans F soit de coût minimum dans (G, c).
(ii) Soit un circuit absorbant C.

Pour une s-arborescence F et $v \in V(F) - s$, l'arc unique de F qui entre v est noté par $F(v)$.

Etape 1: En exécutant l'algorithme de marquage orienté trouver une s-arborescence couvrante F_1 de $G, i := 1$.

Etape 2: Soit $\pi_i(v)$ le coût du (s, v)-chemin unique dans F_i $\forall v \in V$.

Etape 3: Si $\pi_i(v) - \pi_i(u) \leq c(uv)$ $\forall uv \in A$, alors arrêter avec $F := F_i$.

Etape 4: Sinon, soit uv un arc pour lequel $\pi_i(v) - \pi_i(u) > c(uv)$.

Etape 5: Si $F_i + uv$ contient un circuit C alors arrêter avec C.

Etape 6: Sinon, $F_{i+1} := F_i + uv - F_i(v), i := i + 1$ et aller à l'Etape 2.

Exercice 2.1

Énoncé

(a) F_i est une s-arborescence couvrante de G.

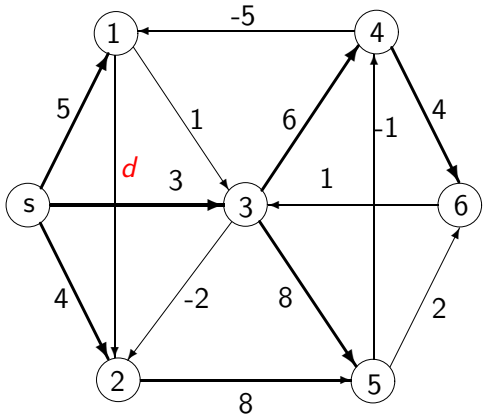
(b) Si on s'arrête à l'Etape 5, alors C est un circuit absorbant.

(c) Si on s'arrête à l'Etape 3, alors F est l'arborescence désirée.

(d) $\sum_{v \in V} \pi_{i+1}(v) < \sum_{v \in V} \pi_i(v)$.

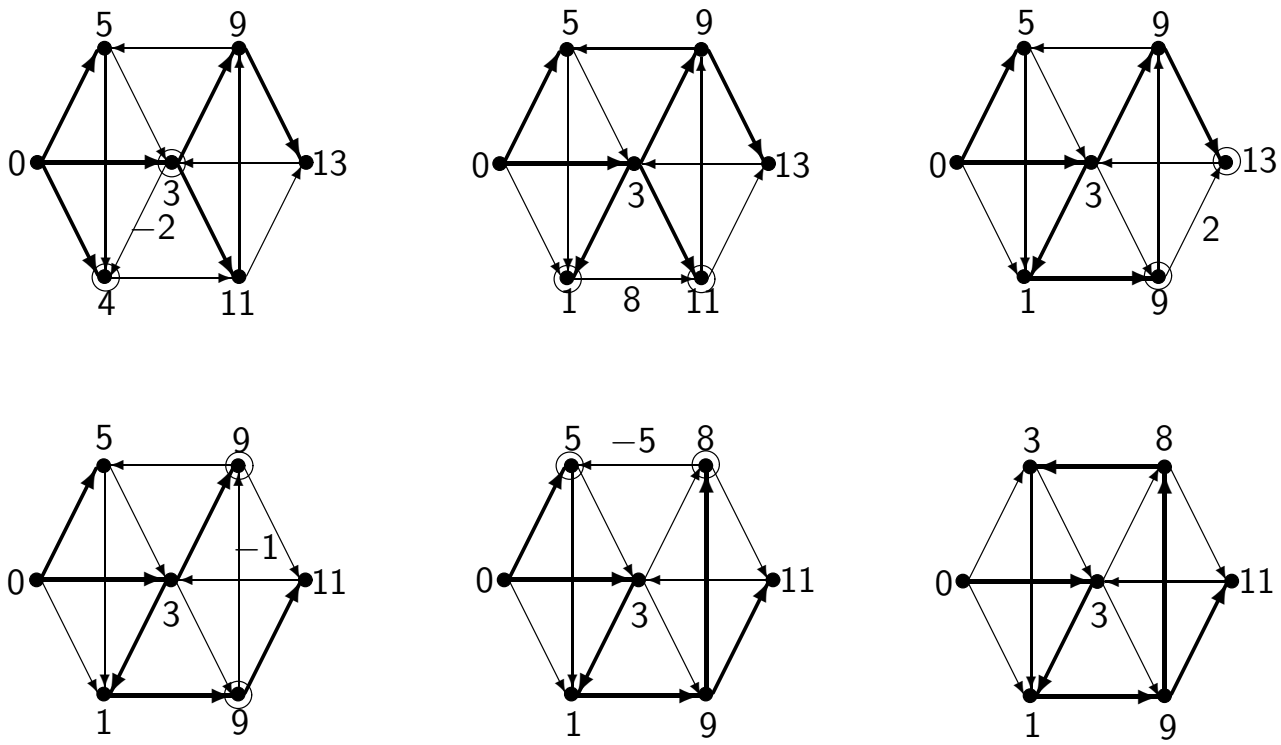
(e) L'algorithme s'arrête en temps fini. (Mais pas polynomial !)

(f) Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig dans (G, c) en commençant avec l'arborescence F. (1) $d = 1$ et puis (2) $d = -3$.

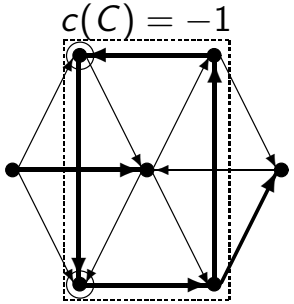


Exercice 2.1(f)

(1)



(2)



Exercice 2.1 (a)

Remarque

F est une s-arborescence $\iff$ F est sans circuit et $d_F^-(w) = 1 \ \forall w \neq s$.

Démonstration

1. Par récurrence sur i.
2. $i = 1$: par l'Exercice 1.16, F_1 est une s-arborescence couvrante de G.
3. Supposons que F_i est une s-arborescence couvrante de G.
4. Par la Remarque, F_i est sans circuit et $d_{F_i}^-(w) = 1 \ \forall w \neq s$.
5. Puisque on ne s'est pas arrêté à l'Etape 5, F_{i+1} est sans circuit.
6. Par construction, $d_{F_{i+1}}^-(w) = d_{F_i}^-(w) = 1 \ \forall w \neq s$.
7. Par la Remarque, F_{i+1} est donc une s-arborescence couvrante de G.

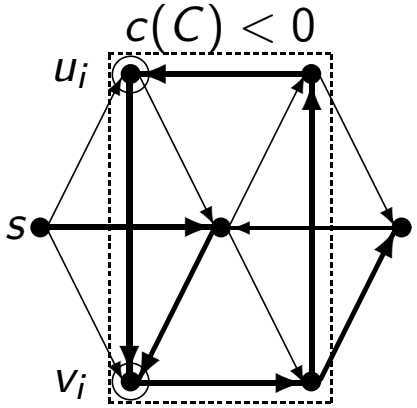
Exercice 2.1 (b)

Démonstration

1. Par l'Étape 4, $\pi_i(v_i) - \pi_i(u_i) > c(u_i v_i)$.

$$\begin{aligned} c(C) &= c(F_i[v_i, u_i]) + c(u_i v_i) \\ &= c(F_i[s, u_i]) - c(F_i[s, v_i]) + c(u_i v_i) \\ &= \pi_i(u_i) - \pi_i(v_i) + c(u_i v_i) \\ &< 0, \end{aligned}$$

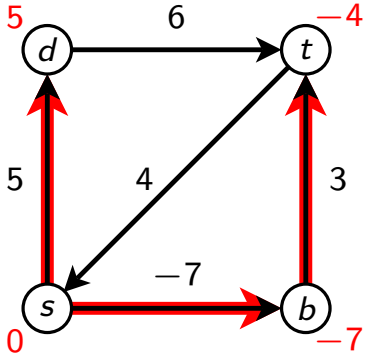
2. autrement dit, le circuit C est absorbant.



Exercice 2.1 (c)

Démonstration

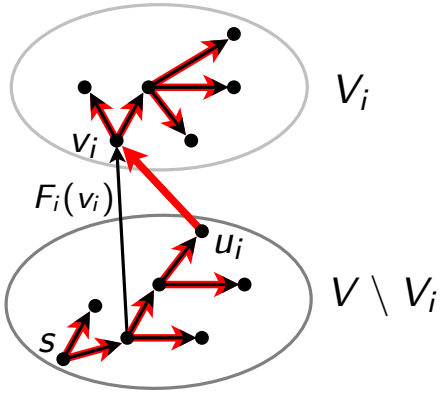
1. Puisque l'algorithme s'arrête à l'Étape 3, π_i est un potentiel de (G, c).
2. Par (a), F_i est une s-arborescence couvrante de G.
3. Par définition de π_i, tous les arcs de F_i sont π_i-serrés.
4. Par l'Exercice 2.6, appliqué à $(G, c), \pi_i$ et $F_i[s, v]$, on a que $F_i[s, v]$ est un (s, v)-chemin de c-longueur minimum dans (G, c).
5. F_i est une s-arborescence couvrante de plus courts chemins de (G, c).



Exercice 2.1 (d)

Démonstration

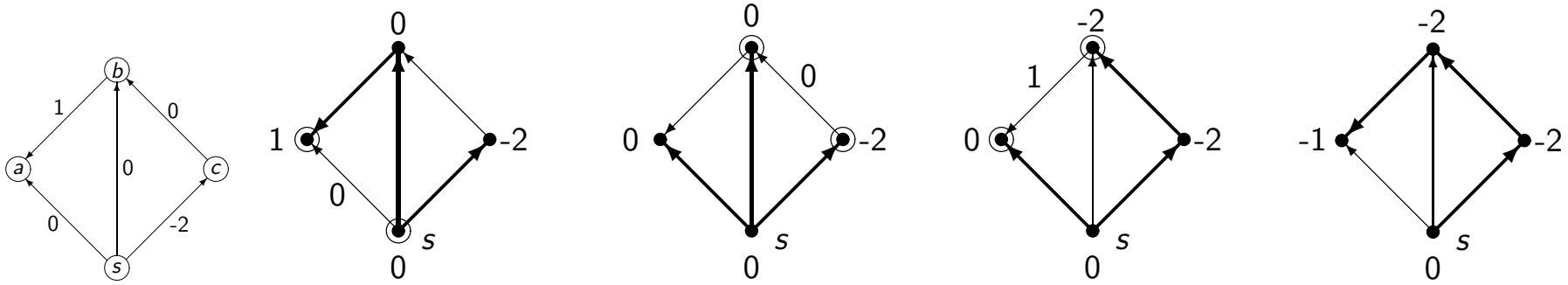
1. Soient $V_i = \mathrm{V}(v_i\text{-sous-arborescence de } F_i)$ et Q_v le (v_i, v)-chemin unique dans F_i. Par l'Étape 4, $\pi_i(v_i) - \pi_i(u_i) > c(u_i v_i)$.
2. $\pi_{i+1}(v) = \pi_i(v)\ \forall v \in V \setminus V_i$.
3. $\pi_{i+1}(v_i) = \pi_{i+1}(u_i) + c(u_i v_i) = \pi_i(u_i) + c(u_i v_i) < \pi_i(v_i)$.
4. $\pi_{i+1}(v) = \pi_{i+1}(v_i) + c(Q_v) < \pi_i(v_i) + c(Q_v) = \pi_i(v)\ \forall v \in V_i$.
5. $\sum_{v \in V} \pi_{i+1}(v) = \sum_{v \in V_i} \pi_{i+1}(v) + \sum_{v \in V \setminus V_i} \pi_{i+1}(v)$
$< \sum_{v \in V_i} \pi_i(v) + \sum_{v \in V \setminus V_i} \pi_i(v) = \sum_{v \in V} \pi_i(v)$.



Exercice 2.1 (e)

Démonstration

1. Par (d), $F_i \neq F_j$ si $i \neq j$.
2. Comme le nombre de s-arborescences couvrantes de G est $\leq C_m^{n-1}$, l'algorithme se termine en temps fini.



Exercice 2.6

Énoncé

1. Soit π un potentiel d'un réseau (G, c).
2. Un arc uv de G est dit π-serré si $c(uv) = \pi(v) - \pi(u)$.
3. Soit $P := \{v_1, \ldots, v_k\}$ un (s, t)-chemin de G tel que chaque arc de P soit π-serré.
4. Montrer que P est un (s, t)-chemin de coût minimum dans (G, c).

Démonstration

1. $dist_{(G,c)}(s, t) \leq c(P) = \sum_{i=1}^{k-1} c(v_i v_{i+1}) = \sum_{i=1}^{k-1}(\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) = \pi(v_k) - \pi(v_1) = \pi(t) - \pi(s) \leq \max\{\pi'(t) - \pi'(s) : \pi' \text{ potentiel}\} = dist_{(G,c)}(s, t)$.
2. On a donc égalité partout, en particulier : $dist_{(G,c)}(s, t) = c(P)$.

Exercice 2.7

Énoncé

1. Soient P un plus court (s,t)-chemin et $\pi(v) := dist(s,v)$, le potentiel canonique d'un réseau (G,c).
2. Montrer que chaque arc de P est π-serré.

Démonstration

1. Soit uv un arc quelconque de P.
2. Par l'optimalité des sous-chemins : $dist(s,v) = dist(s,u) + c(uv)$.
3. D'où $\pi(v) - \pi(u) = dist(s,v) - dist(s,u) = c(uv)$.
4. l'arc uv est donc π-serré.