Optimisation Combinatoire 2A
Plus courts chemins

Zoltán Szigeti

Ensimag
INP Grenoble

Plus courts chemins (= chemins de coût minimum)

Observation

"Le plus court chemin d'un point à un autre
c'est d'y envoyer quelqu'un à sa place." - Philippe Geluck

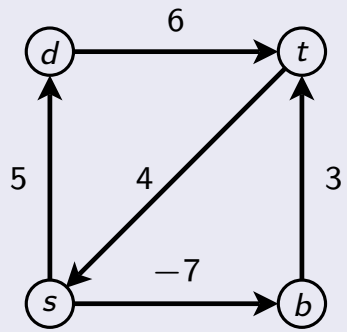
Problème

Aller d'un point à un autre point le plus vite possible.

Modélisation

1. réseau : (G, c) où
   1. $G = (V, A)$ un graphe orienté,
   2. $c : A \to \mathbb{R}$ un coût sur les arcs.
2. distance : $dist_{(G,c)}(s, t) = c$-coût minimum d'un (s, t)-chemin dans G.

Exemple



Avertissement

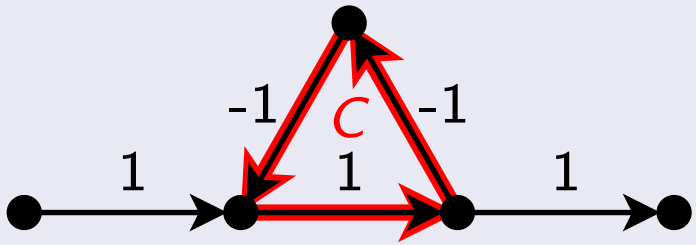
Le nombre de (s, t)-chemins peut être exponentiel.

Problème de circuit absorbant

Définition

Circuit absorbant : un circuit C dont le coût total est négatif, $c(C) < 0$.

Exemple



Remarques

1. avec circuit absorbant :
   1. chemin : pas de solution optimale,
   2. chemin élémentaire : problème (NP-)difficile.
2. sans circuit absorbant :
   1. les deux problèmes coïncident,
   2. on peut les résoudre.

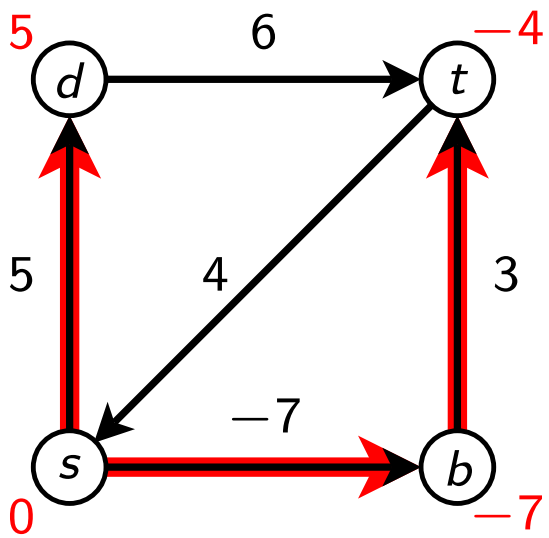
Chemins optimaux

Remarque

On calcule le plus court chemin à partir de s à tous les sommets.

Propriété des sous-chemins optimaux

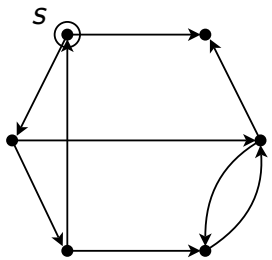
Tout sous-chemin d'un plus court chemin est un plus court chemin.



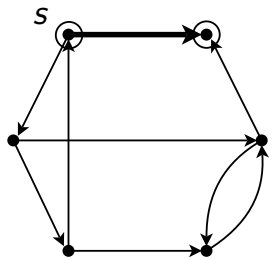
Cas spéciaux

Algorithmes pour les cas spéciaux:

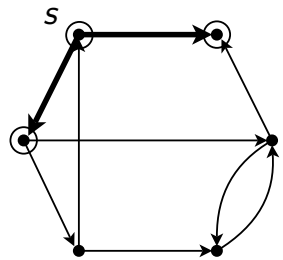
1. pas de coût : algorithme recherche en largeur d'abord,
2. pas de circuit : algorithme de Bellman, (plus longues chemins aussi!)
3. pas de coût négatif : algorithme de Dijkstra.



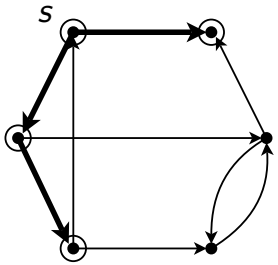
(1)



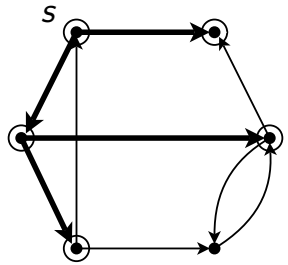
(2)



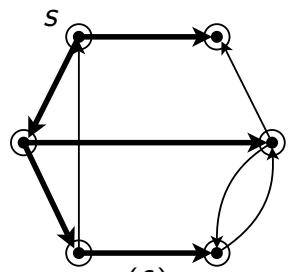
(3)



(4)



(5)



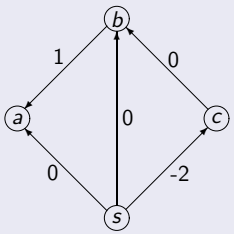
(6)

4. Pas de circuit absorbant : Programmation dynamique

Algorithme de Bellman-Ford

1. $w_k(v) :=$ coût minimum d'un (s, v)-chemin de ayant au plus k arcs,
2. au début : $w_0(s) = 0$ et $w_0(v) = \infty$ pour tout sommet $v \in V \setminus s$,
3. Par récurrence (d'après l'optimalité des sous-chemins) :
   $w_{k+1}(v) = \min\{w_k(v), w_k(u) + c(uv) : uv \in A\}$,
4. à la fin : $w_n(v)$ est la distance de s à v pour tout $v \in V$ où $n = |V|$.

Exemple



	0	1	2	3	4
s	0	0	0	0	0
a	∞	0	0	-1	-1
b	∞	0	-2	-2	-2
c	∞	-2	-2	-2	-2

Remarque

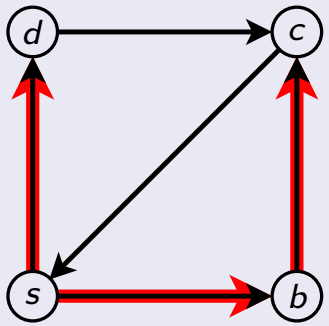
Dans un réseau sans circuit absorbant, dist(s, v) existe pour tout sommet v.

Arborescences

Définitions

1. racine d'un graphe orienté G : un sommet s tel que dans G chaque sommet peut être atteint par un chemin à partir de s.
2. s-arborescence de G : un graphe partiel F de G tel que
   1. sans cycle + s racine de F, $\Longleftrightarrow$
   2. sans circuit + dans F le degré entrant de chaque sommet sauf s est 1.

Exemple



Théorème

s est une racine de $G \Longleftrightarrow G$ possède une s-arborescence.

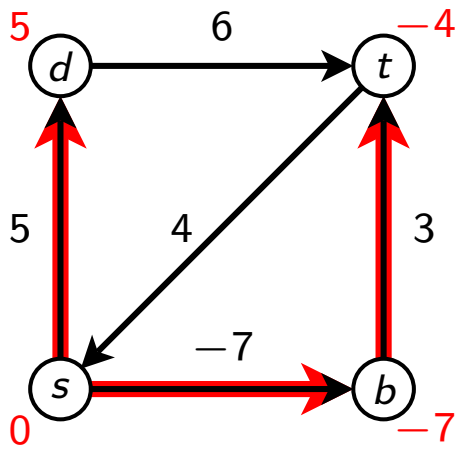
Théorie

Résultats

1. Caractérisation des réseaux sans circuit absorbant.
2. Théorème min-max sur la distance.
3. Résultat structurel : arborescence des plus courts chemins.

Algorithme

1. Algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig pour trouver
   1. soit une arborescence des plus courts chemins,
   2. soit un circuit absorbant.



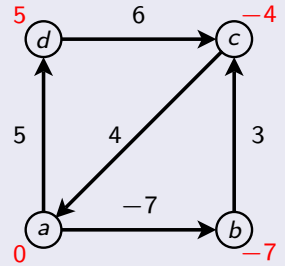
Caractérisation

Définition

Une fonction $\pi : V \to \mathbb{R}$ est un potentiel d'un réseau (G, c) si :

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) \quad \forall uv \in A(G).$$

Exemple



Théorème (Gallai)

(G, c) est sans circuit absorbant $\iff$ (G, c) possède un potentiel.

Démonstration ($\Longleftarrow$) :

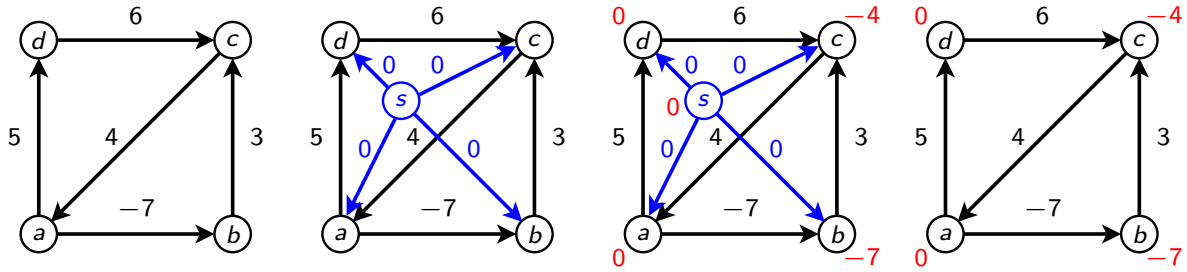
Soient π un potentiel et $C := \{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1} = v_1\}$ un circuit de G.

$$0 = \sum_{i=1}^{k} (\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) \leq \sum_{i=1}^{k} c(v_i v_{i+1}) = c(C).$$

Caractérisation

Démonstration ($\Longrightarrow$) :

1. Soit (G', c') le réseau obtenu à partir de (G, c) en ajoutant un nouveau sommet s et pour chaque sommet v l'arc sv avec coût 0.
2. (G', c') est un réseau sans circuit absorbant et s est une racine.
3. $dist_{(G',c')}(s, v) \leq dist_{(G',c')}(s, u) + c'(uv)$ pour tout arc $uv \in A(G)$.
4. $\pi(w) := dist_{(G',c')}(s, w)$ est un potentiel de (G, c) : $\forall uv \in A(G)$, $\pi(v) - \pi(u) = dist_{(G',c')}(s, v) - dist_{(G',c')}(s, u) \leq c'(uv) = c(uv)$.



Remarque

Les distances à partir d'une racine s forment un potentiel (canonique).

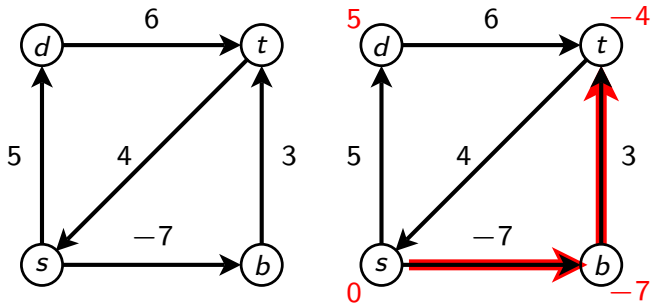
Théorème min-max

Théorème (Duffin)

Pour un réseau (G, c) sans circuit absorbant, une racine s de G, $t \in V(G)$:
$\min\{c(P) : P\ (s,t)\text{-chemin de } G\} = \max\{\pi(t) - \pi(s) : \pi \text{ potentiel de } (G, c)\}$.

Démonstration

1. Pour tout (s,t)-chemin $P := \{s = v_1, ..., v_k = t\}$ et tout potentiel π, $c(P) = \sum_{i=1}^{k-1} c(v_i v_{i+1}) \geq \sum_{i=1}^{k-1} (\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) = \pi(v_k) - \pi(v_1)$ $= \pi(t) - \pi(s)$, donc $\min \geq \max$.
2. Pour un (s,t)-chemin P^* de coût min et le potentiel $\pi^* = dist_{(G,c)}(s, v)$, $\pi^*(t) - \pi^*(s) = dist(s,t) - dist(s,s) = c(P^*)$, donc $\min = \max$.



Résultat structurel : arborescences des plus courts chemins

Théorème

Pour tout réseau (G, c) sans circuit absorbant ayant une racine s, il existe une s-arborescence F de G telle que le (s, v)-chemin dans F est de coût minimum dans (G, c) pour chaque sommet v.

Définition

arc uv est π-serré : $\pi(v) - \pi(u) = c(uv)$.

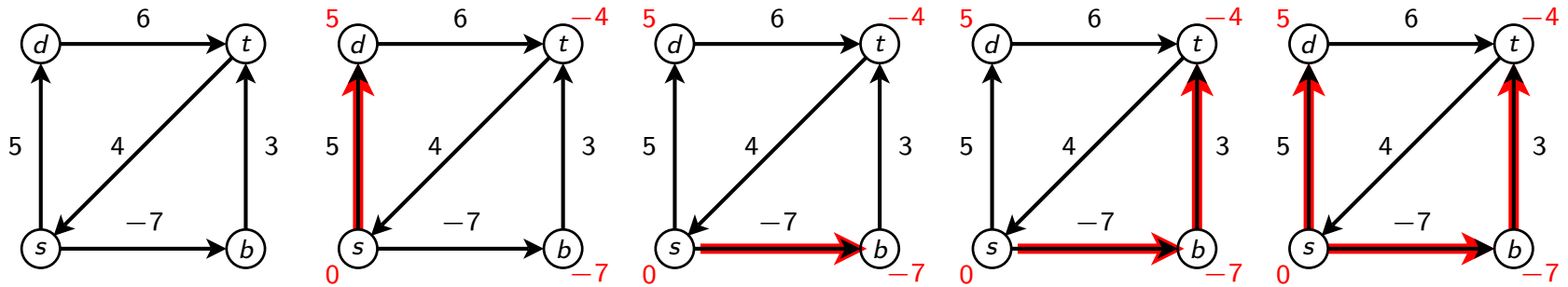
Lemmes

1. Tous les arcs d'un plus court chemin sont dist-serrés. Puisque, d'après l'optimalité des sous-chemins : $dist(s, v) - c(uv) = dist(s, u)$.
2. Un chemin dont tous les arcs sont π-serrés est un plus court chemin. Puisque il donne égalité dans le théorème min-max.

Résultat structurel : arborescences des plus courts chemins

Démonstration

1. Soit P_v un plus court (s, v)-chemin pour tout sommet v.
2. Tous les arcs de P_v sont dist-serrés d'après Lemme 1.
3. Soit $G' := (V, A')$ où $A' := \cup\{A(P_v) : v \in V\}$.
4. Puisque s est une racine de G',
5. il existe une s-arborescence F de G', donc de G.
6. Le chemin unique $F[s, v]$ dans F est de coût minimum dans (G, c) d'après Lemme 2.

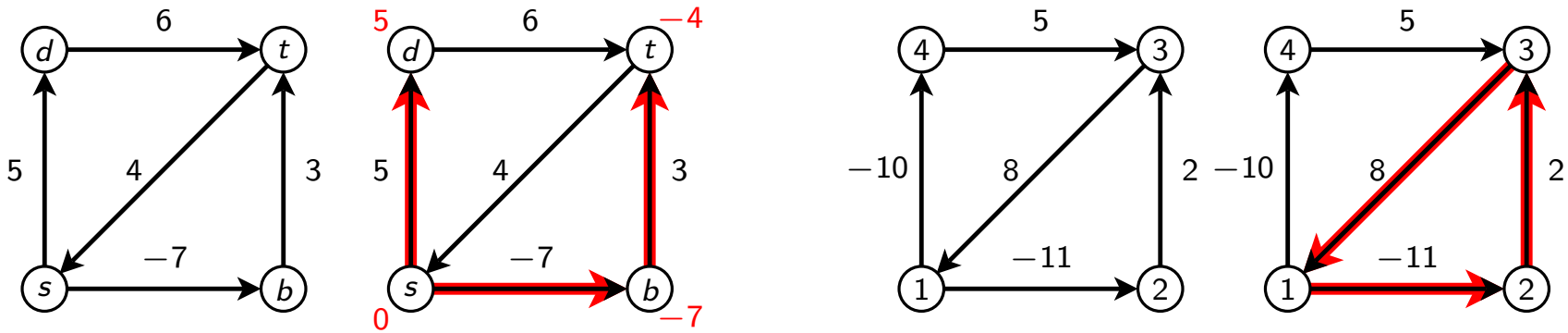


Algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig

Algorithme

Entrée : un réseau (G, c) et une racine s de G.
Sortie : l'un et un seul des suivants :

1. une s-arborescence F de G dont le chemin unique à partir de s à chaque sommet v est un plus court (s, v)-chemin dans (G, c),
2. un circuit absorbant.

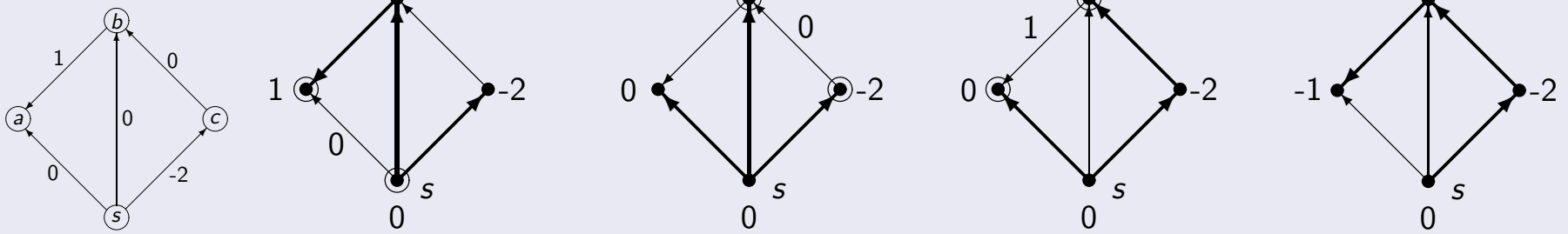


Algorithme de Ford-Fulkerson-Dantzig

Algorithme

1. On commence avec une s-arborescence F quelconque de G (algorithme de marquage orienté peut en fournir une.)
2. Si les distances à partir de s dans l'arborescence F forment un potentiel dans (G, c) alors on s'arrête (F est l'arborescence cherchée).
3. Sinon, on a un arc uv de G qui viole la condition :
   1. Si $F \cup uv$ contient un circuit C, alors on s'arrête (C est absorbant).
   2. Sinon, $F + uv - F(v)$ est une meilleur arborescence et on va à 2.

Exemple



Justification

Théorème

1. F_i est une s-arborescence de G.
2. Si on s'arrête à l'Etape 3, alors C est un circuit absorbant.
3. Si on s'arrête à l'Etape 2, alors F_i est l'arborescence désirée.
4. $\sum_{v \in V} \pi_{i+1}(v) < \sum_{v \in V} \pi_i(v)$.
5. L'algorithme s'arrête en temps fini. (Mais pas polynomial !)

Démonstration en TD.

Remarque

Il existe des algorithmes polynomiaux pour trouver

1. soit une s-arborescence des plus courts chemins
2. soit un circuit absorbant.

Applications

Problèmes

1. Sac à dos,
2. Approximation d'une fonction linéaire par morceaux,
3. Transport maritime,
4. Système d'inéquations formé de différences,
5. Échanges de devises.

Aphorisme

"Le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite,
à condition que les deux points soient bien en face l'un de l'autre."

- Pierre Dac