Optimisation Combinatoire 2A
Révision : Théorie des graphes

Zoltán Szigeti

Ensimag
INP Grenoble

Exercice 1.1(a)

Énoncé

La somme des degrés des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est égale à deux fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Démonstration

1. Calculer la somme des degrés des sommets de G revient à compter les arêtes incidentes à chaque sommet et puis à ajouter ces nombres.
2. Chaque arête uv est comptée exactement deux fois dans la somme : une fois dans $d(u)$ et une autre fois dans $d(v)$.

EXO 1.1(b)

Énoncé

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

Démonstration

1. Par l'Exercice 1.1(a),

$$\overbrace{2|E|}^{pair} = \sum_{v \in V} d(v) = \overbrace{\sum_{d(v)\ pair} d(v)}^{pair} + \sum_{d(v)\ impair} d(v).$$

2. Donc $\sum_{d(v)\ impair} d(v)$ est pair.
3. Or une somme de nombres impairs n'est paire que si le nombre de termes de cette somme est pair.

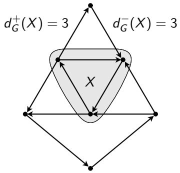
Exercice 1.2(a)

Définition

- degré entrant $d_D^-(X)$ de X : le nombre d'arcs entrants dans X,
- degré sortant $d_D^+(X)$ de X : le nombre d'arcs sortants de X.

Énoncé

$$\sum_{v \in X} d_D^-(v) = d_D^-(X) + |A(D[X])|.$$



Démonstration

1. Calculer la somme des degrés entrants des sommets dans X revient à compter les arcs entrants de chaque sommet dans X et puis à ajouter ces nombres.
2. Chaque arc entrant X et chaque arc dans X est compté exactement une fois dans la somme.

Exercice 1.2(b)

Énoncé

$$\sum_{v\in V} d_D^+(v) = \sum_{v\in V} d_D^-(v).$$

Démonstration

Par l'Exercice 1.2(a),

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} d_D^+(v) &= d_D^+(V) + |A(D[V])| \\ &= |A| \\ &= d_D^-(V) + |A(D[V])| \\ &= \sum_{v\in V} d_D^-(v).\end{aligned}$$

Exercice 1.2(c)

Énoncé

$$\sum_{v \in X} (d_D^+(v) - d_D^-(v)) = d_D^+(X) - d_D^-(X).$$

Démonstration

Par l'Exercice 1.2(a),

$$\begin{aligned}\sum_{v \in X} (d_D^+(v) - d_D^-(v)) &= (d_D^+(X) + |A(D[X])|) - (d_D^-(X) + |A(D[X])|) \\ &= d_D^+(X) - d_D^-(X).\end{aligned}$$

Exercice 1.3

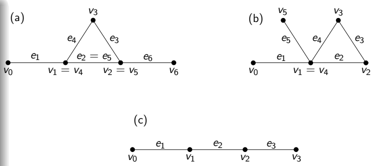
Énoncé

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une (s, t)-chaîne.

(b) Il existe une (s, t)-chaîne simple.

(c) Il existe une (s, t)-chaîne élémentaire.



Démonstration

(c) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (a) : évidentes.

(a) $\Longrightarrow$ (c) :

- Soit P une (s, t)-chaîne ayant un nombre minimum d'arêtes.
- Si $v_i = v_j$ alors en supprimant la sous-suite $v_i e_i \dots v_{j-1} e_{j-1}$ entre v_i et v_j on a une (s, t)-chaîne qui est plus courte que P, contradiction.
- P est donc élémentaire.

Exercice 1.4

Énoncé

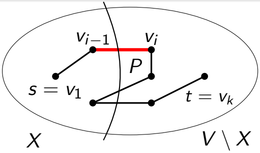
Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une (s,t)-chaîne.

(b) $d_G(X) \geq 1 \; \forall X : s \in X \subseteq V \setminus t$.

Démonstration : (a) $\Longrightarrow$ (b)

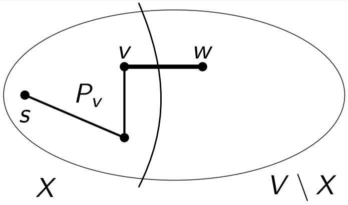
1. Soient $P = v_1 v_2 \dots v_k$ une (s,t)-chaîne et $s \in X \subseteq V \setminus t$.
2. Soit i le plus petit indice tel que $v_i \in V \setminus X$ (existe car $v_k \in V \setminus X$).
3. Comme $v_1 \in X$, on a $i \geq 2$, d'où $v_{i-1} \in X$, et donc
4. l'arête $v_{i-1}v_i$ de P sort de X, d'où $d_G(X) \geq 1$.



Exercice 1.4

Démonstration : (b) $\Longrightarrow$ (a)

1. Supposons que $\quad d_G(X) \geq 1 \quad \forall X : \; s \in X \subseteq V \setminus t.$
2. Soit $X = \{v \in V :$ il existe une (s, v)-chaîne P_v dans $G\}$.
3. Par définition, $s \in X$.
4. $d_G(X) = 0$: s'il existait $vw \in E, v \in X \subseteq V \setminus w$ alors $P_w := P_v + vw$ serait une (s, w)-chaîne, ainsi $w \in X$, contradiction.
5. Par la condition, $t \in X$, c'est-à-dire
6. qu'il existe une (s, t)-chaîne.



Exercice 1.5

Énoncé

Soient s et t deux sommets d'un graphe orienté $D = (V, A)$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe un (s, t)-chemin.

(b) $d_G^+(X) \geq 1 \ \forall X : s \in X \subseteq V \setminus t$.

(c) Il existe un (s, t)-chemin élémentaire.

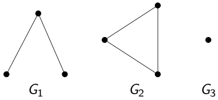
Démonstration

Comme la version non-orientée.

Exercice 1.6

Définitions

1. graphe connexe : Il existe une chaîne entre chaque paire de sommets dans le graphe.
2. composantes connexes d'un graphe : Les sous-graphes connexes maximaux du graphe.



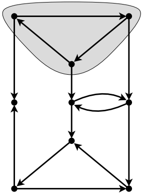
Énoncé

Un graphe $G = (V, E)$ est connexe $\iff$ $d_G(X) \geq 1 \quad \forall\, \emptyset \neq X \subsetneq V$.

Démonstration

Triviale, par l'Exercice 1.4.

Exercice 1.7



Définitions

1. graphe orienté fortement connexe : Il existe un chemin de chaque sommet à chaque sommet.
2. composantes fortement connexes d'un graphe orienté : Les sous-graphes fortement connexes maximaux.

Énoncé

Un graphe orienté $D = (V, A)$ est fortement connexe $\iff$ $d_D^+(X) \geq 1 \quad \forall\, \emptyset \neq X \subsetneq V$.

Démonstration

Triviale, par l'Exercice 1.5.

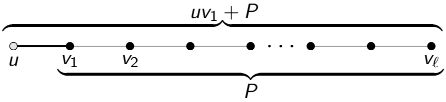
Exo 1.8

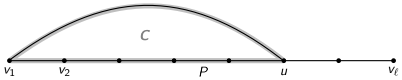
Énoncé

Si tous les degrés des sommets d'un graphe simple G sont supérieurs ou égaux à deux, alors G possède un cycle élémentaire.

Démonstration

1. Soit $P := v_1 v_2 \dots v_\ell$ une plus longue chaîne élémentaire de G.
2. Par $d(v_1) \geq 2$ et G simple, il existe un voisin $u \neq v_2$ de v_1.
3. $u \in \{v_3, ..., v_\ell\}$: sinon $P' := uv_1 + P$ serait une chaîne élémentaire plus longue que P, contradiction.
4. $C := P[v_1, u] + uv_1$ est donc un cycle élémentaire.



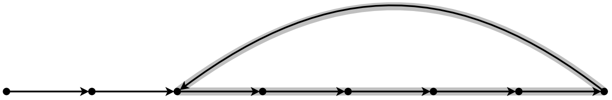


Énoncé

Si $d_D^+(v) \geq 1 \ \forall v \in V(D)$ alors il existe un circuit élémentaire.

Démonstration

- On commence un parcours à partir d'un sommet quelconque,
- quand on arrive à un sommet non-visité on peut en sortir, par la condition.
- quand on arrive à un sommet déjà visité on a un circuit élémentaire entre les deux apparitions de ce sommet.



Exo 1.10

Définition

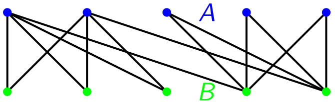
Graphe biparti : s'il existe une partition de $V(G)$ en deux ensembles A et B telle que chaque arête de G relie un sommet de A à un sommet de B.

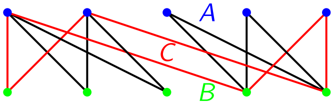
Énoncé

G est biparti $\Longleftrightarrow$ G ne contient pas de cycle élémentaire impair.

Démonstration de nécessité

1. Soient $G = (A, B; E)$ biparti et C un cycle élémentaire de G.
2. $(A, B; E(C))$ est biparti et $d_C(v) = 0$ ou 2 pour tout $v \in A$.
3. $|E(C)| = \sum_{v \in A} d_C(v) \equiv \sum_{v \in A} 0 = 0 \bmod 2$.

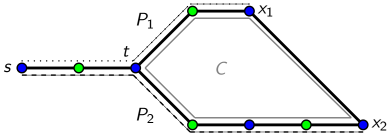




Exo 1.10

Démonstration de suffisance

1. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe.
2. Choisir un sommet s de V, $A := \{s\}$, $B := \emptyset$.
   Tant qu'il existe $u \in A \cup B, v \notin A \cup B, uv \in E$ faire :
   $B := B \cup \{v\}$ si $u \in A$ et $A := A \cup \{v\}$ si $u \in B$; $p(v) := u$.
3. S'il existe $x_1x_2 \in E$ tq x_1 et x_2 sont de même couleur alors faire :
   Soit P_i la (s, x_i)-chaîne obtenue en utilisant $p(.)$ $(i = 1, 2)$.
   Soit t le dernier sommet en commun de P_1 et P_2 à partir de s.
4. $C := P_1[x_1, t] + P_2[t, x_2] + x_2x_1$ est un cycle élémentaire impair, contradiction. G est donc biparti.



Exo 1.11

Énoncé

Pour un graphe $D = (V, A)$ orienté, (a) et (b) sont équivalentes :

(a) Il existe une partition des arcs de D en circuits élémentaires.

(b) $d^+_D(v) = d^-_D(v) \quad \forall v \in V.$

Démonstration : (a) $\Longrightarrow$ (b)

1. Soit $\{C_1, \ldots, C_k\}$ une partition des arcs de D en circuits élémentaires.
2. $d^+_{C_i}(v) = 1 = d^-_{C_i}(v) \ \ \forall v \in V(C_i).$
3. $d^+_{C_i}(v) = 0 = d^-_{C_i}(v) \ \ \forall v \notin V(C_i).$
4. $d^+_D(v) = \sum_{i=1}^k d^+_{C_i}(v) = \sum_{i=1}^k d^-_{C_i}(v) = d^-_D(v) \quad \forall v \in V.$

Exo 1.11

Démonstration : (b) $\Longrightarrow$ (a)

1. Par récurrence sur $|A|$; pour $|A| = 0$, c'est trivial.
2. Sinon, il existe une composante connexe D_1 de D, qui contient un arc.
3. $d^+_{D_1}(v) = d^-_{D_1}(v), d^+_{D_1}(v) + d^-_{D_1}(v) \geq 1 \Longrightarrow d^+_{D_1}(v) \geq 1 \ \forall v \in V(D_1)$.
4. Par l'Exercice 1.9, D_1 a un circuit élémentaire C_1.
5. $D' := D - A(C_1)$.
6. $d^+_{D'}(v) = d^-_{D'}(v) \ \forall v \in V(D)$ et $|A'| < |A|$, par récurrence, il existe donc une partition $\{C_2, \dots, C_k\}$ de A' en circuits élémentaires.
7. $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ est la partition cherchée de A.

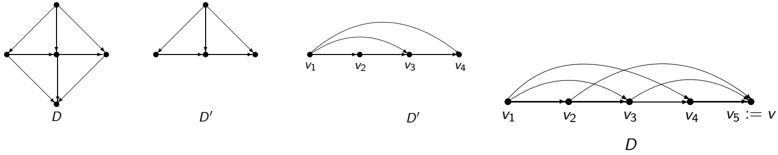
Exo 1.12

Énoncé

D est sans circuit $\Longleftrightarrow$ il existe un ordre topologique $v_1, \ldots, v_n$ de $V(D)$: si $v_i v_j \in A(D)$ alors $i < j$.

Démonstration

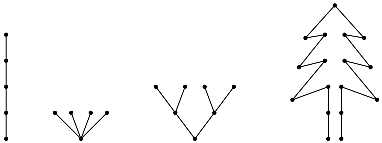
1. suffisance : l'ordre topologique montre qu'on ne peut jamais revenir.
2. nécessité : on peut construire l'ordre topologique en choisissant successivement un sommet de degré sortant zéro dans le graphe qui reste après avoir effacé les sommets déjà choisis.



Exo 1.13

Définition

arbre : graphe connexe, sans cycle.



Énoncé

Montrer que $G = (V, E)$ est un arbre $\Longleftrightarrow$
il existe une unique (x, y)-chaîne élémentaire $\forall x, y \in V$.

Démonstration

1. G est connexe $\Longleftrightarrow$
   il existe au moins une (x, y)-chaîne élémentaire dans G $\forall x, y \in V$.
2. G est sans cycle $\Longleftrightarrow$
   il existe au plus une (x, y)-chaîne élémentaire dans G $\forall x, y \in V$.

Exo 1.14

Définition

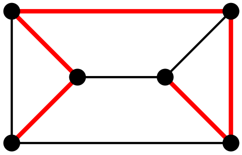
arbre couvrant de G : arbre contenant tous les sommets de G.

Énoncé

Montrer qu'un graphe G admet un arbre couvrant $\Longleftrightarrow$ G est connexe.

Démonstration de nécessité :

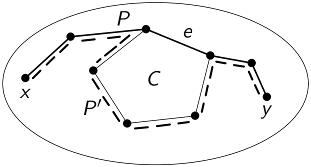
Si H est un arbre couvrant de G, alors H est connexe, donc G l'est aussi.



Exo 1.14

Démonstration de suffisance :

1. Supposons que G est un graphe connexe.
2. Soit H un graphe partiel connexe de G avec un nombre minimum d'arêtes.
3. Si H contenait un cycle C, alors pour une arête e de C, $H - e$ serait un graphe partiel connexe de G, contenant moins d'arêtes que H, ce qui contredirait la minimalité de H.
4. Par conséquent, H est un graphe partiel de G connexe et sans cycle, donc un arbre couvrant de G.



Exo 1.15

Définition

s-arborescence : graphe orienté tq il existe un unique (s, t)-chemin $\forall t \in V$.

Algorithme de Marquage

Entrée: Un graphe orienté $D = (V, A)$ et un sommet s de D.

Sortie : S les sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin, et $F \subseteq A$ tel que (S, F) soit une s-arborescence.

Étape 0: *Initialisation.*

$S := \{s\}$ et $F := \emptyset$.

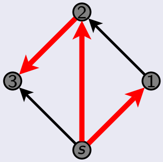
Étape 1: *Marquage.*

Tant qu'il existe $uv \in A$, $u \in S, v \notin S$ faire

$S := S \cup \{v\}$ et $F := F \cup \{uv\}$,

Étape 2: *Fin de l'algorithme.*

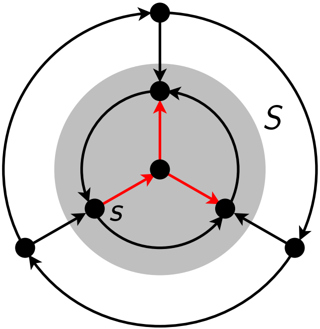
STOP.



Exo 1.15

Démonstration

1. Par récurrence, à chaque étape (S, F) est une s-arborescence.
2. Par (1) et par définition, il existe un (s, v)-chemin $\forall v \in S$.
3. A la fin, $d_D^+(S) = 0$, il n'existe donc pas de (s, v)-chemin $\forall v \notin S$.
4. $S =$ les sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin.



Exo 1.16

Énoncé

Soit s un sommet de $D = (V, A)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) il existe un (s, t)-chemin dans D, $\forall t \in V \setminus s$,

(b) $d_D^+(X) \geq 1 \ \forall X : s \in X \subsetneq V$,

(c) il existe une s-arborescence couvrante de D.

Démonstration

1. (a) $\Longrightarrow$ (b) : Par l'Exercice 1.5.
2. (b) $\Longrightarrow$ (c) : Par l'Algorithme de Marquage.
3. (c) $\Longrightarrow$ (a) : Par définition.