2A – Optimisation Combinatoire

Feuille 1

DEGRÉS

Exercice 1.1. —

(a) Montrer que la somme des degrés des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ non-orienté est égale à deux fois le nombre d'arêtes, c'est-à-dire $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$.

(b) En déduire que le nombre de sommets de degré impair est pair.

Exercice 1.2. — Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté. Montrer que pour tout $X \subseteq V$, on a

(a) $\sum_{v \in X} d_D^-(v) = d_D^-(X) + |A(D[X])|$,

(b) $\sum_{v \in V} d_D^+(v) = \sum_{v \in V} d_D^-(v)$.

(c) $\sum_{v \in X} \left(d_D^+(v) - d_D^-(v) \right) = d_D^+(X) - d_D^-(X)$.

CHAÎNES - CHEMINS

Exercice 1.3. — Soit G un graphe non-orienté. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une chaîne entre u et v dans G.

(b) Il existe une chaîne simple entre u et v dans G.

(c) Il existe une chaîne élémentaire entre u et v dans G.

Exercice 1.4. — (Caractérisation de l'existence d'une (s, t)-chaîne) Soient s et t deux sommets d'un graphe G. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe une chaîne de s à t.

(b) Pour tout sous-ensemble X de sommets tel que $s \in X,\ t \notin X$, on a $d_G(X) \geq 1$.

Exercice 1.5. — (Caractérisation de l'existence d'un (s, t)-chemin) Soient s et t deux sommets d'un graphe orienté D. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe un chemin de s à t.

(b) Pour tout sous-ensemble X de sommets tel que $s \in X,\ t \notin X$, on a $d_D^+(X) \geq 1$.

(c) Il existe un chemin élémentaire de s à t.

CONNEXITÉ - FORTE CONNEXITÉ

Exercice 1.6. — (Caractérisation des graphes connexes) Montrer qu'un graphe G non-orienté est connexe si et seulement si $d_G(X) \geq 1$ pour chaque $\emptyset \neq X \subset V(G)$.

Exercice 1.7. — (Caractérisation des graphes fortement connexes) Montrer qu'un graphe D orienté est fortement connexe si et seulement si $d_D^+(X) \geq 1$ pour chaque $\emptyset \neq X \subset V(D)$.

CYCLES - CIRCUITS

Exercice 1.8. — Montrer que si tous les degrés des sommets d'un graphe G non-orienté simple sont supérieurs ou égaux à deux, alors G admet un cycle élémentaire.

Exercice 1.9. — Montrer qu'un graphe orienté D a un circuit élémentaire si $d_D^+(v) \geq 1\ \forall v \in V(D)$.

Exercice 1.10. — (Caractérisation des graphes bipartis) Montrer qu'un graph G est biparti si et seulement si G ne contient pas de cycle impair.

Exercice 1.11. — Montrer que pour un graphe D orienté les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) Il existe une partition des arcs de D en circuits élémentaires.
(b) $d^+_D(v) = d^-_D(v) \quad \forall v \in V(D)$.

Exercice 1.12. — (Caractérisation des graphes orientés sans circuit) Soit D un graphe orienté. Montrer qu'il existe un ordre topologique de D si et seulement si D est sans circuit.

ARBRES

Exercice 1.13. — Montrer qu'un graphe non-orienté est un arbre si et seulement si pour toute paire x, y de sommets il existe une et une seule chaîne élémentaire entre x et y.

Exercice 1.14. — (Caractérisation de l'existence d'un arbre couvrant) Montrer qu'un graphe G non-orienté admet un arbre couvrant si et seulement si G est connexe.

ALGORITHME DE MARQUAGE

Exercice 1.15. — (**Justification de l'algorithme de Marquage Orienté**)

ALGORITHME DE MARQUAGE ORIENTÉ :
ENTRÉE : Un graphe orienté D et un sommet s de D.
SORTIE : L'ensemble S des sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin dans D, et un ensemble F d'arcs de D tel que (S, F) soit une s-arborescence.

Etape 0 : *Initialisation.*
$S_1 := \{s\},\ i := 1$ et $A_1 := \emptyset$.
Etape 1 : *Marquage.*
Tant qu'il existe un arc uv de D tel que $u \in S_i, v \notin S_i$ faire :
$S_{i+1} := S_i \cup \{v\},\ A_{i+1} := A_i \cup uv,\ i := i + 1$.
Etape 2 : *Fin de l'algorithme.*
$S := S_i,\ F := A_i$, STOP.

Exercice 1.16. — (Caractérisation de l'existence d'une s-arborescence couvrante)
Soit s un sommet d'un graphe orienté D. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(a) Pour tout sommet t de D, il existe un (s, t)-chemin dans D.
(b) Pour tout sous-ensemble X de sommets de D contenant s mais pas tous les sommets de D, il existe au moins un arc de D qui sort de X.
(c) Il existe une s-arborescence couvrante de D.