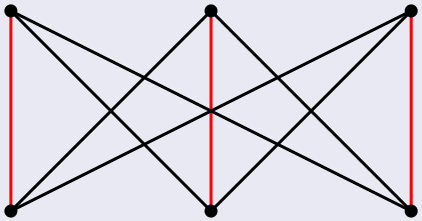
Optimisation Combinatoire 2A
Couplages dans les graphes généraux TD

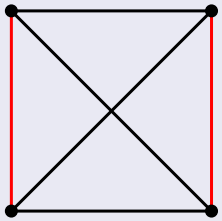
Zoltán Szigeti

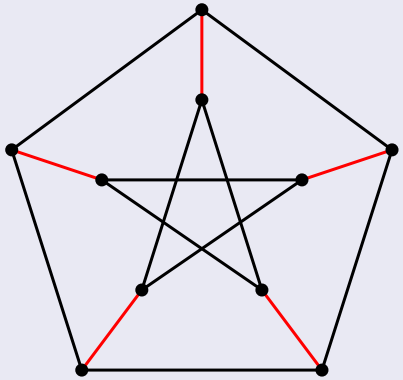
Ensimag
Grenoble INP

Exemples

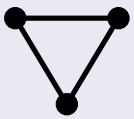
Graphes avec couplage parfait

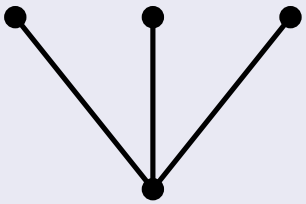


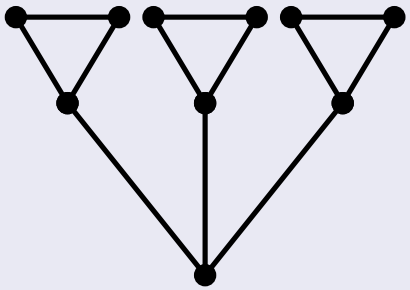


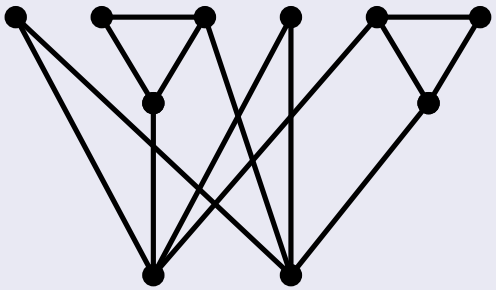


Graphes sans couplage parfait





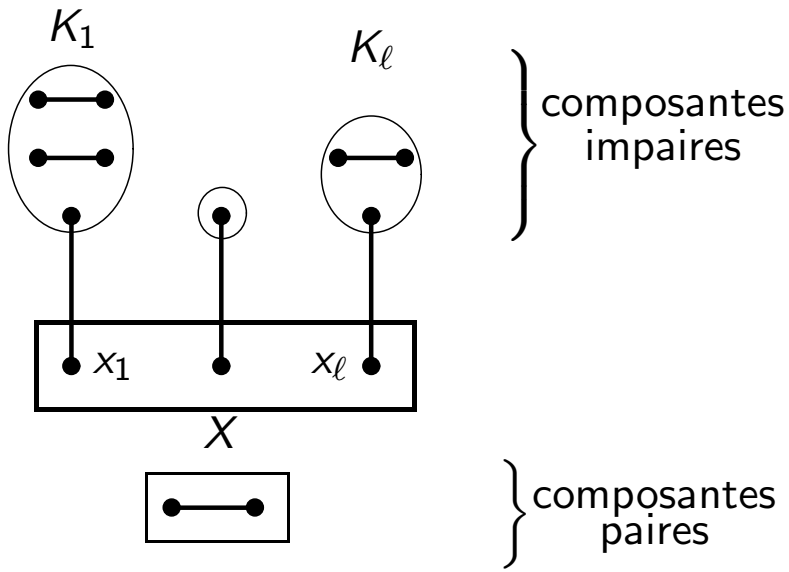




Définitions

Définitions

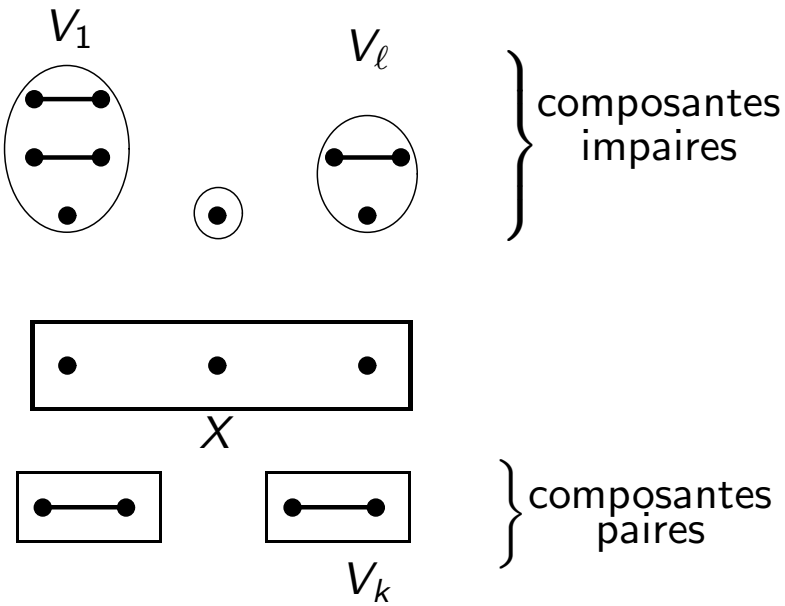
1. Graphe impair/pair : $|V(G)|$ est impair/pair.
2. $c_o(G - X)$: nombre de composantes connexes impaires de $G - X$.



Exercice 7.1 : Parité

Énoncé : $G = (V, E)$ graphe, $X \subseteq V$.

1. $|V| \equiv c_o(G - X) + |X| \quad (2)$.
2. Si $|V|$ est pair, alors $c_o(G - X) \equiv |X| \quad (2)$.



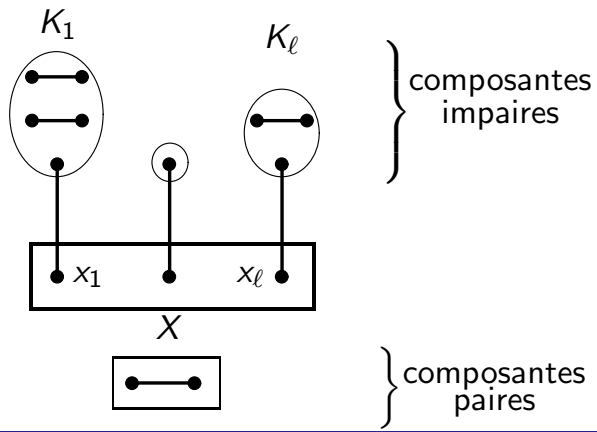
Caractérisation de l'existence d'un couplage parfait

Théorème de Tutte

G admet un couplage parfait $\Longleftrightarrow c_o(G-X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V(G) \quad (T)$.

Démonstration de nécessité : Soit M un couplage parfait de G.

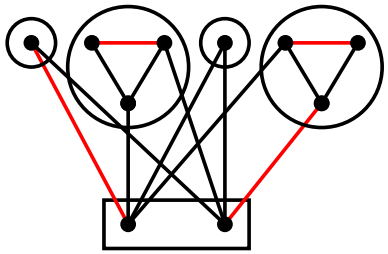
1. Soient $K_1, ..., K_\ell$ les composantes connexes impaires de $G-X$.
2. M est un couplage parfait et $|V(K_i)|$ est impair, il existe donc une arête de M qui relie K_i à un sommet x_i dans X.
3. Comme M est un couplage, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
4. $c_o(G-X) = \ell = |\{x_1, ..., x_\ell\}| \leq |X|$.



Couplage de cardinal maximum

Formule de Berge-Tutte: $G = (V, E)$

1. $\max\{2|M| : M \text{ couplage de } G\} =$
   $\min\{|V| - c_o(G - X) + |X| : X \subseteq V\}$.
2. $\min\{|\text{sommets } M\text{-insaturés}| : M \text{ couplage de } G\} =$
   $\max\{c_o(G - X) - |X| : X \subseteq V\}$.



Démonstration (min $\geq$ max)

Soient M un couplage de G, $X \subseteq V$ et $K_1, \ldots, K_{c_o(G-X)}$ les composantes impaires de $G - X$.

1. $|V(K_i)|$ impair $\Rightarrow$ chaque K_i contient au moins un sommet tel que
   1. soit il est M-insaturé,
   2. soit il est relié à un sommet de X par une arête de M.
2. M couplage $\Rightarrow$ il y en a $\leq |X|$ qui sont reliés à X par une arête de M,
3. il y en a $\geq c_o(G - X) - |X|$ qui contiennent un sommet M-insaturé.

Exercice 7.5

Énoncé

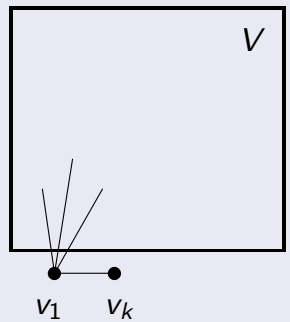
Le but de cet exercice est de démontrer la Formule de Berge-Tutte :

$$2\nu(G) = \min\{|V| - c_o(G - X) + |X| : X \subseteq V\}.$$

Soit $k := \max\{c_o(G - X) - |X| : X \subseteq V\}$.

(a) Montrer que $2\nu(G) \leq |V| - k$.

Soit $G' := (V', E')$ où $V' := V \cup U$,
$U := \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ et
$E' := E \cup \{v_i u : 1 \leq i \leq k, u \in V'\}$.



(b) Montrer que G' admet un couplage parfait.

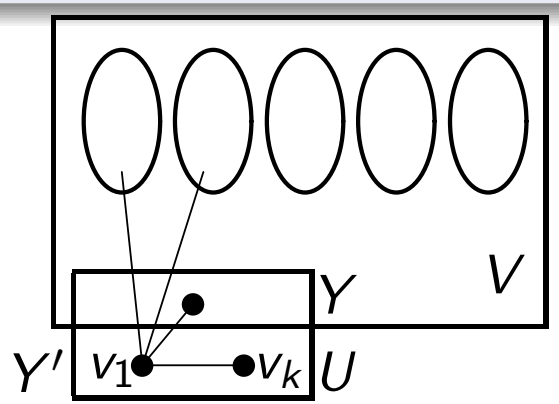
(c) En déduire que $2\nu(G) \geq |V| - k$.

(d) Conclure.

Exercice 7.5

Démonstration de (b)

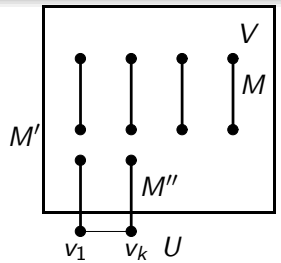
1. Supposons que G' n'admet pas de couplage parfait.
2. Par Théorème de Tutte, $\exists Y' \subset V'$ tel que $c_o(G' - Y') > |Y'|$.
3. D'après l'Exercice 7.1, $|V| \equiv k \bmod 2$ ainsi $|V'| = |V| + k \equiv 0 \bmod 2$.
4. Par (2), (3) et l'Exercice 7.1, $c_o(G' - Y') \geq |Y'| + 2$.
5. Par (4), $G' - Y'$ admet au moins deux composantes connexes.
6. Comme chaque v_i est relié à tous les sommets, par (5), $U \subseteq Y'$.
7. Pour $Y := Y' - U$, par (2), $c_o(G - Y) = c_o(G' - Y') > |Y'| = |Y| + k$,
8. Par définition de k et (7), on a contradiction $k \geq c_o(G - Y) - |Y| > k$.



Exercice 7.5

Démonstration de (c)

1. D'après (b), G' admet un couplage parfait M', donc $|M'| = |V'|/2$.
2. M'' := les arêtes de M' qui sont incidentes à U, et $M := M' - M''$.
3. $|M''| \leq |U| = k$.
4. Alors M est un couplage de G de la taille $|M'| - |M''| \geq |V'|/2 - k$.
5. Donc $2\nu(G) \geq 2|M| \geq 2(|V'|/2 - k) = |V'| - 2k = |V| - k$.



Démonstration de (d) : D'après (a) et (c),

$$\begin{aligned} 2\nu(G) &= |V| - k \\ &= |V| - \max\{c_o(G - X) - |X| : X \subseteq V\} \\ &= \min\{|V| - c_o(G - X) + |X| : X \subseteq V\}. \end{aligned}$$

Exercice 7.6

Théorème de Hall : Graphes bipartis

$(U, V; E)$ admet un couplage parfait $\Longleftrightarrow |U|=|V|$, $|\Gamma(X)| \geq |X|$ $\forall X \subseteq U$.

Théorème de Tutte : Graphes généraux

G admet un couplage parfait $\Longleftrightarrow c_o(G-X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V(G) \quad (T)$.

Énoncé : Théorème de Tutte $\Longrightarrow$ Théorème de Hall.

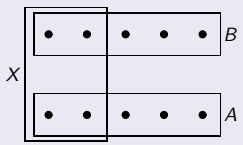
Soient $G = (A, B; E)$ un graphe biparti satisfaisant les conditions de Hall et $X \subseteq A \cup B$ de cardinal maximum tel que $c_o(G-X) - |X|$ soit maximum.

(a) Montrer que chaque composante connexe K de $G-X$ est un sommet.

(b) En déduire que $c_o(G-X)=|A-X|+|B-X|$ et que $\Gamma(A-X)\subseteq B\cap X$.

(c) En déduire que $c_o(G-X) - |X| = 0$.

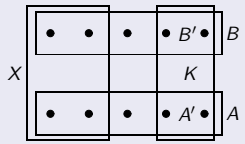
(d) Conclure.



Exercice 7.6

Démonstration de (a)

1. K est un sous-graphe de G, il est donc biparti, $K = (A', B'; E')$.
2. Nous pouvons supposer que $|B'| \geq |A'|$.
3. Si $|K|$ est impair alors $|B'| \geq |A'| + 1$.

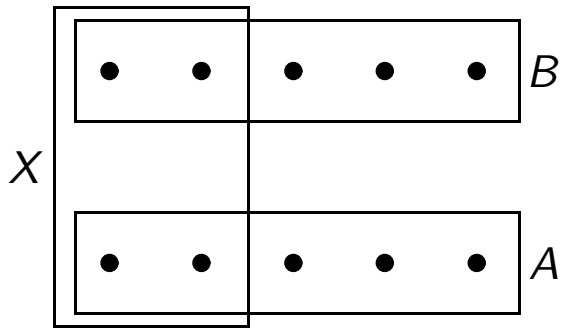


4. Si $|K|$ est pair alors
   1. $c_o(G - (X \cup A')) - |X \cup A'| \geq c_o(G - X) + |B'| - |X| - |A'| \geq c_o(G - X) - |X|$.
   2. Alors la définition de X implique d'abord que $|B'| = |A'|$, puis $A' = \emptyset$, donc K est vide, contradiction.
5. Si $|K|$ est impair alors
   1. $c_o(G - (X \cup A')) - |X \cup A'| \geq c_o(G - X) - 1 + |B'| - |X| - |A'| \geq c_o(G - X) - |X|$.
   2. Alors la définition de X implique d'abord que $|B'| = |A'| + 1$, puis $A' = \emptyset$, donc K est un sommet.

Exercice 7.6

Démonstration de (b)

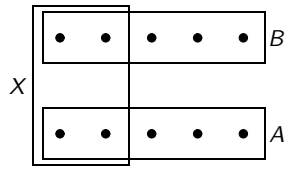
1. Par (a), chaque composante connexe de $G - X$ est un sommet.
2. Par (1), $G - X$ admet exactement $|(A \cup B) - X| = |A - X| + |B - X|$ composantes connexes impaires.
3. Par (1), tous les voisins de $A - X$ sont en $B \cap X$.



Exercice 7.6

Démonstration de (c)

1. Par les conditions de Hall, $|A| = |B|$ et $|\Gamma(A - X)| \geq |A - X|$.
2. Par (1) et (b), $(*)$ $|A \cap X| + |A - X| = |B \cap X| + |B - X|$,
   $(**)$ $|B \cap X| \geq |A - X|$.
3. En ajoutant $(*)$ et deux fois $(**)$ on obtient, d'après (b), que
4. $|X| = |A \cap X| + |B \cap X| \geq |A - X| + |B - X| = c_o(G - X)$.
5. Comme $c_o(G - \emptyset) - |\emptyset| \geq 0$, la définition de X et (4) implique (c):
   $0 \geq c_o(G - X) - |X| \geq c_o(G - \emptyset) - |\emptyset| \geq 0$.



Démonstration de (d)

1. On peut en conclure que la condition de Tutte est satisfaite.
2. D'après Théorème de Tutte, le graphe G admet un couplage parfait.

Exercice 7.8 : Ordonnancement sur 2 machines

Énoncé

1. Nous devons exécuter n tâches sur 2 machines identiques.
2. Le temps d'exécution de chaque tâche est une minute.
3. Il est connu pour chaque paire de tâches si elles peuvent être exécutées parallèlement sur les machines.
4. On cherche le temps minimum d'exécution de toutes les tâches.
5. Modéliser ce problème avec un problème de couplage de cardinal maximum.

Exercice 7.8 : Ordonnancement sur 2 machines

Solution

1. On cherche un ensemble M de paires T_i, T_j de tâches qui seront exécutées parallèlement.
2. Le temps d'exécution de ces tâches est $|M|$ et de celles qui restent est $n - 2|M|$.
3. Le temps d'exécution à minimiser est donc $n - |M|$.
4. Soit $G := (V, E)$ où $V := \{\text{tâche } T_i : 1 \leq i \leq n\}$ et $E := \{T_i T_j :$ elles peuvent être exécutées parallèlement$\}$.
5. M correspond à un couplage de G.
6. On cherche donc un couplage de G de cardinal maximum.