Optimisation Combinatoire 2A
Couplages dans les graphes généraux

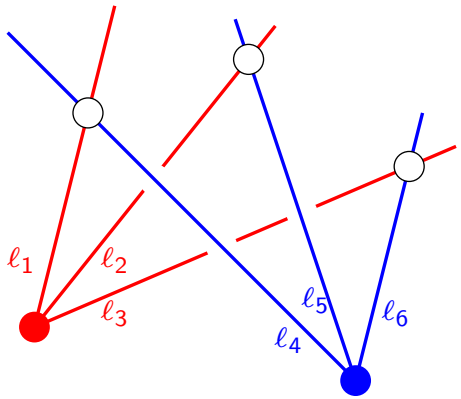
Zoltán Szigeti

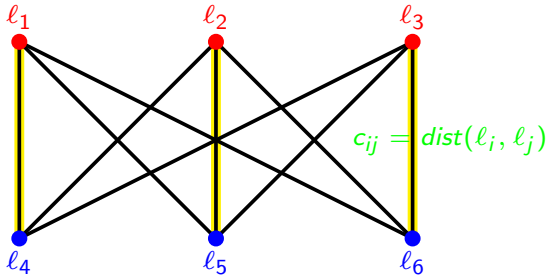
Ensimag
INP Grenoble

Application : couplages dans les graphes bipartis

Application : détections des objets

- On veut trouver les positions exactes de n objets dans l'espace 3-dimensionnel à l'aide de deux détecteurs infrarouges fixés.
- Chaque détecteur nous fournit n droites sur lesquelles les objets se trouvent.
- Ces $2n$ droites donnent théoriquement les positions exactes des n objets.
- À cause de problèmes techniques on n'a que des droites approximatives.
- On sait que deux droites correspondant au même objet ont une distance euclidienne très petite.
- Comment peut-on modéliser ce problème avec les couplages ?





Couplages dans les graphes généraux

Planning

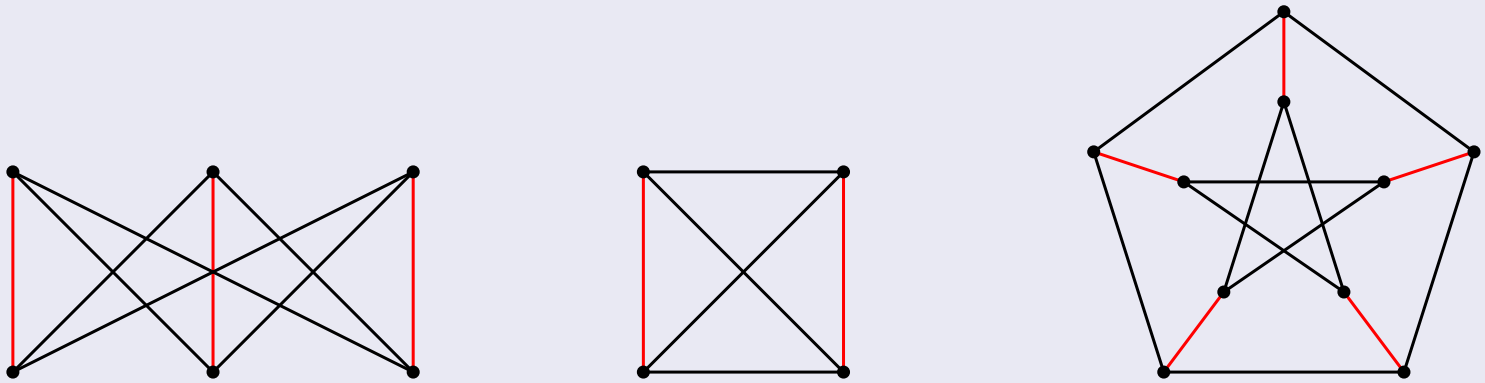
1. Théorèmes d'existence et min-max,
2. Algorithmes pour trouver un couplage parfait / de cardinal maximum.

Application : Affectation des pilotes

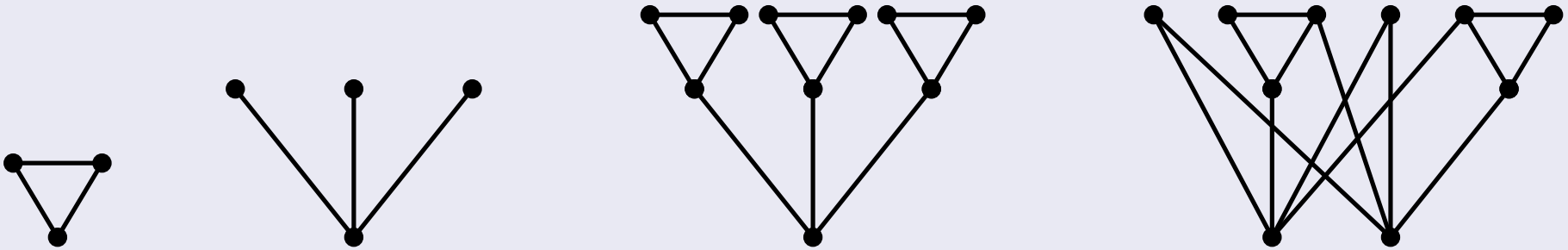
- Le directeur d'une compagnie aérienne veut maximiser le nombre de vols effectués au même moment avec les pilotes de la compagnie.
- Il a besoin de deux pilotes pour chaque vol.
- Malheureusement, certains pilotes ne peuvent pas voler ensemble.
- Le directeur connait ses pilotes, il sait donc si deux pilotes sont compatibles ou pas.
- Modéliser ce problème par un problème de couplage dans un graphe.

Exemples

Graphes avec couplage parfait



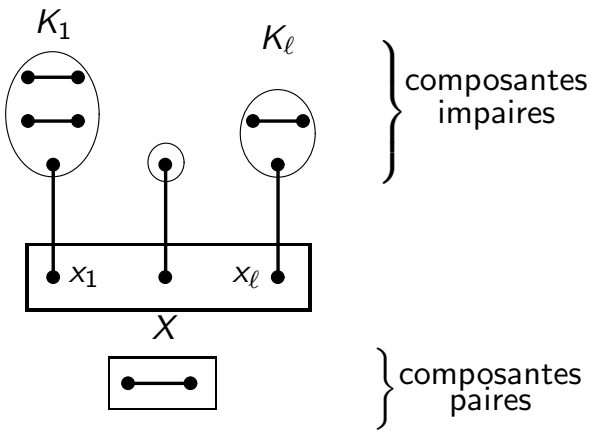
Graphes sans couplage parfait



Définitions

Définitions

1. Graphe impair/pair : $|V(G)|$ est impair/pair.
2. $c_o(G - X)$: nombre de composantes connexes impaires de $G - X$.
3. barrière : $X \subseteq V(G)$ tel que $c_o(G - X) = |X|$.



Parité

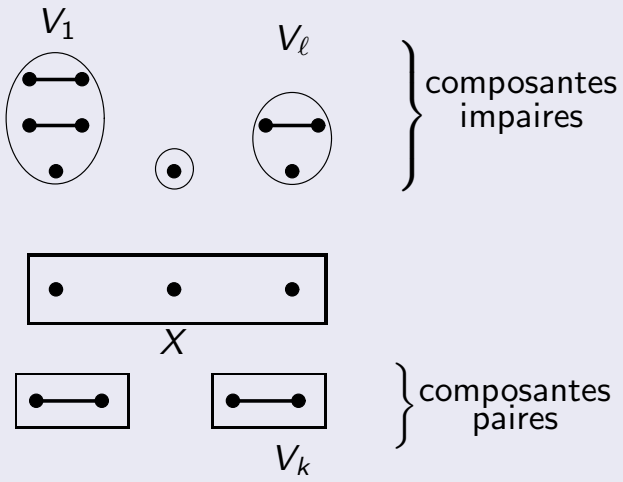
Lemme : $G = (V, E)$ graphe, $X \subseteq V$.

1. $|V| \equiv c_o(G - X) + |X| \quad (2)$.
2. Si $|V|$ est pair, alors $c_o(G - X) \equiv |X| \quad (2)$.

Démonstration

$\{X, V_1, V_2, ..., V_k$ les composantes connexes de $G - X\}$ = partition de V.

$$\begin{aligned} |V| &= |X| + \sum_{1}^{k} |V_i| \\ &= |X| + \sum_{|V_i| \ impair} |V_i| + \sum_{|V_i| \ pair} |V_i| \\ &\equiv |X| + \sum_{|V_i| \ impair} 1 + \sum_{|V_i| \ pair} 0 \\ &= |X| + c_o(G - X) \quad (2). \end{aligned}$$



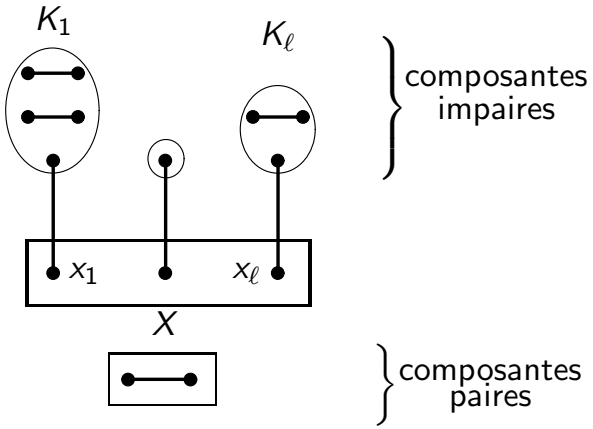
Condition nécessaire pour avoir une couplage parfait

Lemme

Si G admet un couplage parfait M alors $\forall X \subseteq V(G)$, $c_o(G - X) \leq |X|$.

Démonstration

1. Soient $K_1, ..., K_\ell$ les composantes connexes impaires de $G - X$.
2. M est un couplage parfait et $|V(K_i)|$ est impair, il existe donc une arête de M qui relie K_i à un sommet x_i dans X.
3. Comme M est un couplage, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
4. $c_o(G - X) = \ell = |\{x_1, ..., x_\ell\}| \leq |X|$.



Caractérisation de l'existence d'un couplage parfait

Théorème de Tutte

G admet un couplage parfait $\iff c_o(G - X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V(G) \quad (T)$.

Démonstration

Soient G un graphe connexe qui satisfait (T) et X une barrière maximale.

1. $|V(G)|$ est pair.
2. $X \neq \emptyset$.
3. $G - X$ n'a pas de composante connexe paire.
4. Pour chaque sommet v de chaque composante connexe impaire K de $G - X$, $K - v$ satisfait (T).
5. Soit $B_X = (X, Y; F)$ le graphe biparti obtenu de G en contractant chaque composante connexe impaire de $G - X$ et en enlevant toutes les arêtes dans $G[X]$. B_X admet un couplage parfait.
6. On en déduira que G possède un couplage parfait.

Démonstration du Théorème de Tutte

Démonstration de 1.

1. Par (T) pour l'ensemble $\emptyset$, on a $0 \leq c_o(G - \emptyset) \leq |\emptyset| = 0$.
2. G n'admet donc pas de composante connexe de cardinal impair.
3. Puisque G est connexe, G a une composante connexe qui est paire.

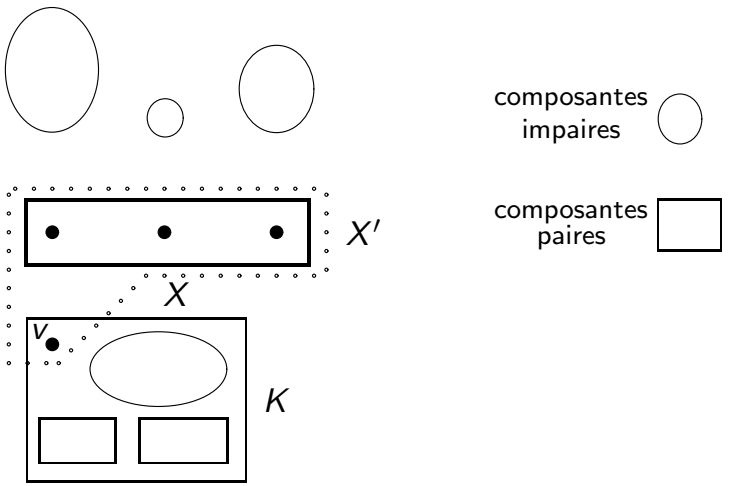
Démonstration de 2.

1. Soit v un sommet quelconque de G.
2. Par (T) pour $\{v\}$, on a, par parité, $1 \leq c_o(G - v) \leq |\{v\}| = 1$.
3. v est donc une barrière.
4. X qui est une barrière maximale n'est pas vide.

Démonstration du Théorème de Tutte

Démonstration de 3.

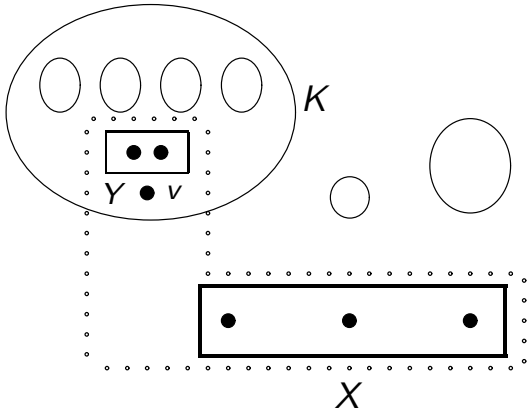
1. Supposons par l'absurde que K est une composante paire de $G - X$.
2. $\forall v \in V(K)$, par parité, $c_o(K - v) \geq 1$.
3. Par (T) pour $X' := X \cup \{v\}$, on a
   $|X'| \geq c_o(G - X') = c_o(G - X) + c_o(K - v) \geq |X| + 1 = |X'|$,
4. X' est donc une barrière.
5. C'est une contradiction car X était une barrière maximale.



Démonstration du Théorème de Tutte

Démonstration de 4.

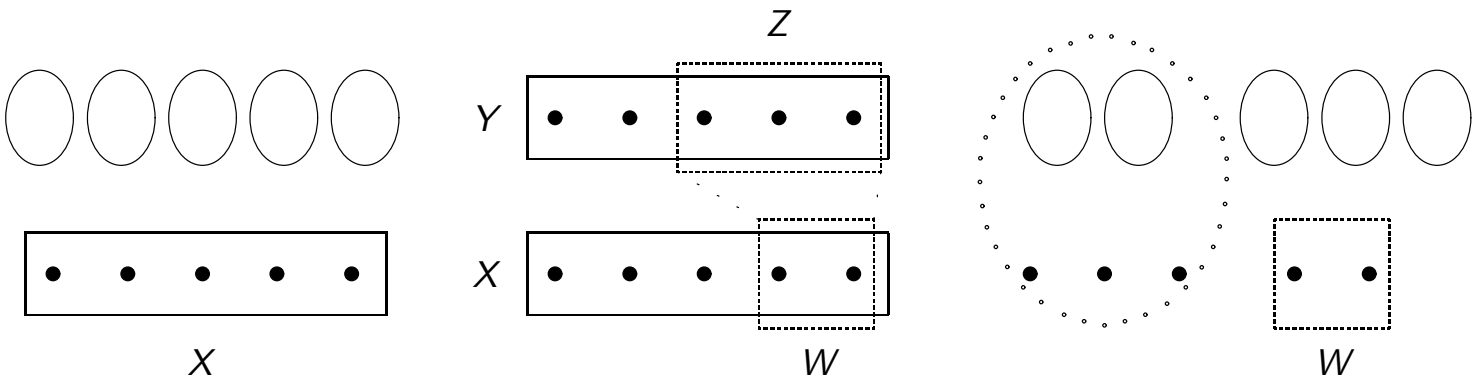
1. Supposons par l'absurde que pour une composante impaire K de $G - X$ et un sommet v de K, $H := K - v$ viole la condition (T), c'est-à-dire qu'il existe $Y \subset V(H)$ avec $c_o(H - Y) > |Y|$.
2. Puisque $|V(H)|$ est pair, par parité, $c_o(H - Y) \geq |Y| + 2$.
3. Par (T), pour $X' := X \cup v \cup Y$, on a $|X'| \geq c_o(G - X') = (c_o(G - X) - 1) + c_o(H - Y) \geq (|X| - 1) + (|Y| + 2) = |X'|$,
4. X' est donc une barrière.
5. C'est une contradiction car X était une barrière maximale.



Démonstration du Théorème de Tutte

Démonstration de 5.

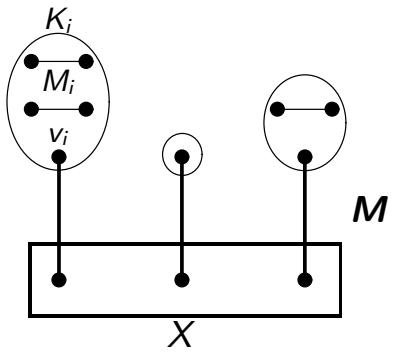
1. Puisque X est une barrière, $|X| = |Y|$.
2. On suppose par l'absurde que B_X n'admet pas de couplage parfait alors, par le Théorème de Hall, il existe un ensemble $Z \subseteq Y$ tel que pour l'ensemble $W \subseteq X$ des voisins de Z, on a $|Z| > |W|$.
3. $\forall v \in Z$ correspond à une composante impaire de $G - X$,
4. en fait, v correspond à une composante impaire de $G - W$.
5. Donc $c_o(G - W) \geq |Z| > |W|$.
6. Alors la condition (T) est violée, contradiction.



Démonstration du Théorème de Tutte

Démonstration de 6.

1. Soit G un contre-exemple tel que $|V(G)|$ soit minimum.
2. Soit X une barrière maximale de G. Par 2, $X \neq \emptyset$.
3. Par 5, B_X admet un couplage parfait M.
4. Pour chaque composante impaire K_i de $G - X$, M relie exactement un sommet v_i de K_i à X.
5. Par 4, $H_i := K_i - v_i$ satisfait (T) et $|V(H_i)| < |V(G)|$, H_i admet donc un couplage parfait M_i.
6. Par 3, $G - X$ n'a pas de composante paire.
7. $M \cup \bigcup_{K_i} M_i$ est un couplage parfait de G,
8. G n'est donc pas un contre-exemple.



Application

Théorème de Petersen

Tout graphe 2-arête-connexe, 3-régulier admet un couplage parfait.

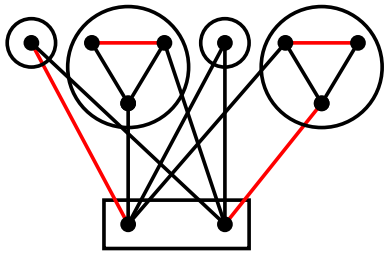
Démonstration

1. Soient X un sous-ensemble de sommets de G, $\ell = c_o(G - X)$,
2. $K_1, ..., K_\ell$ les composantes impaires de $G - X$ et
3. E' l'ensemble d'arêtes entre X et $\bigcup_1^\ell K_i$.
4. Comme le graphe est 2-arête-connexe et 3-régulier, $d(K_i) \geq 2$ et par parité, $d(K_i) \geq 3$, donc $3c_o(G - X) = 3\ell \leq \sum_{i=1}^{\ell} d(K_i) = |E'|$.
5. Comme G est 3-régulier, $|E'| \leq \sum_{v \in X} d(v) = 3|X|$.
6. Par conséquent, $3c_o(G - X) \leq |E'| \leq 3|X|$.
7. Par le Théorème de Tutte, G admet un couplage parfait.

Couplage de cardinal maximum

Formule de Berge-Tutte

1. $\max\{2|M| : M \text{ couplage de } G\} = \min\{|V| - c_o(G - X) + |X| : X \subseteq V(G)\}$.
2. $\min\{|\text{sommets } M\text{-insaturés}| : M \text{ couplage de } G\} = \max\{c_o(G - X) - |X| : X \subseteq V(G)\}$.



Démonstration (min $\geq$ max)

Soient M un couplage de G, $X \subseteq V(G)$ et $K_1, \ldots, K_{c_o(G-X)}$ les composantes impaires de $G - X$.

1. $|V(K_i)|$ impair $\Rightarrow$ chaque K_i contient au moins un sommet tel que
   1. soit il est M-insaturé,
   2. soit il est relié à un sommet de X par une arête de M.
2. M couplage $\Rightarrow$ il y en a $\leq |X|$ qui sont reliés à X par une arête de M,
3. il y en a $\geq c_o(G - X) - |X|$ qui contiennent un sommet M-insaturé.