

Les documents, à l'exception d'une feuille A4 recto-verso, et les appareils électroniques sont interdits. Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.

Exercice 1 : Une chocolaterie peut produire du chocolat noir, du chocolat au lait ou du chocolat blanc à partir de cacao et de lait. L'entreprise dispose de 500 kilos de cacao et de 1000 litres de lait. Les quantités d'ingrédients nécessaires et le prix de vente par kilo de chocolat produit sont donnés dans le tableau suivant pour chaque type :

	Cacao (g)	Lait (l)	Prix de vente (€)
Un kilo de chocolat noir	800	0	8
Un kilo de chocolat au lait	400	0,4	5
Un kilo de chocolat blanc	200	0,6	3

On cherche à maximiser les profits de l'entreprise.

Question 1 – Modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Un kilo de chocolat au lait peut également être produit à partir de 500 grammes de chocolat noir et de 0,4 litre de lait. Le cout d'une telle transformation est de 1 euro par kilo de chocolat noir transformé.

Question 2 – En ajoutant cette nouvelle possibilité, modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Exercice 2 : On souhaite résoudre le programme linéaire (PL) suivant avec l'algorithme du simplexe.

$$\begin{aligned} \max z = & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Question 1 – Faites une étape de pivotage de l'algorithme du simplexe en faisant entrer la variable x_1 . A la fin de l'étape, vous préciserez les variables en base, les variables hors base et la solution de base associée.

Question 2 – A la fin de l'étape précédente, indiquez si la solution obtenue est optimale. Si elle est optimale, donnez sa valeur (valeur de la fonction objectif). Si elle n'est pas optimale, précisez pour l'itération suivante une variable entrante et une variable sortante associée.

Exercice 3 : On considère le programme linéaire suivant.

$$\begin{aligned} \max z = & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 \\ \text{s.c.} & & x_2 + 2x_3 & & & \leq 60 \\ & x_1 & & + x_4 & & \leq 40 \\ & & x_2 + x_3 & + x_5 & & \leq 50 \\ & & 2x_2 & + x_5 & & \leq 30 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, \geq 0 \end{aligned}$$

Question 1 – Formuler le programme linéaire dual.

Le problème primal a été mis sous forme standard en introduisant des variables d'écart s_1 , s_2 , s_3 et s_4 , puis résolu par un logiciel utilisant la méthode du simplexe. On vous indique que les variables en base à l'optimum sont x_1 , x_3 , x_5 et s_4 .

Pour chacune des questions suivantes, vous décrierez bien les étapes de vos raisonnements.

Question 2 – Utilisez cette information pour calculer les valeurs des variables du problème primal à l'optimum sans utiliser l'algorithme du simplexe.

Question 3 – Utilisez les valeurs trouvées ci-dessus pour calculer les valeurs des variables duales à l'optimal.

Question 4 – Montrez que la solution obtenue est bien optimale.