RO — L3 Miage TD1

Exercice 1. Dessiner tous les graphes à 3 et 4 sommets, à isomorphisme près.

Exercice 2. Dans un groupe de vingt-quatre étudiants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et huit d'entre eux exactement cinq ?

Question 1. Modéliser ce problème à l'aide d'un graphe.

Question 2. Résoudre le problème.

Exercice 3. Soit G un graphe à n sommets.

Question 1. Quel est le nombre maximum d'arêtes de G (en termes de n) ?

Question 2. Décrire les graphes où il y a égalité.

Exercice 4. Un fermier doit passer la rivière dans une barque juste assez grande pour lui et son loup, ou lui et sa chèvre, ou lui et ses choux. Les choux seront mangés s'il les laisse seuls avec la chèvre, et la chèvre sera mangée s'il la laisse seule avec le loup. Comment faire passer tout ce monde sans dégâts ?

Question 1. Modéliser les états de ce problème à l'aide d'un graphe.

Question 2. Utiliser cette modélisation pour résoudre ce casse-tête.

Exercice 5. Montrer que si on prend 6 étudiants de l'UFR alors, il y a toujours 3 personnes qui ne se connaissent pas mutuellement ou il y a 3 personnes qui se connaissent mutuellement. Donner un exemple avec 5 étudiants où cela n'est pas vrai.

Exercice 6. Dans un tournoi d'échecs, chaque participant doit rencontrer tous les autres. Chaque partie dure une heure. Déterminer la durée minimum du tournoi dans le cas où le nombre de participants est 3, 4, 5 ou 6.

Exercice 7. Dans chacun des exemples suivants, dites si la matrice utilisée peut être une matrice d'adjacence, d'incidence ou ne pas représenter un graphe. Dans les deux premiers cas, dessinez un graphe correspondant, dans le dernier cas, justifiez pourquoi.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 8. On dit que séquence de nombres entiers est *réalisable* s'il existe un graphe dont les sommets ont exactement les degrés de la séquence.

Question 1. Pour chaque séquence qui suit, dites si la séquence est réalisable ou non. Si la réponse est oui, dessinez un tel graphe et dire s'il est unique (à isomorphisme près), sinon justifiez pourquoi il n'y a pas de tel graphe.

(i) $(1, 2, 2, 4, 5, 5)$
(ii) $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$
(iii) $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$
(iv) $(3, 3, 3, 3, 3, 5)$
(v) $(2, 2, 2, 3, 3, 3)$
(vi) $(0, 2, 2, 3, 4, 5)$
(vii) $(2, 2, 5, 5, 5, 5)$

Exercice 9.

Démontrer qu'il y a au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis sur Facebook.