

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

- Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.
- Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.
- Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.
- Les appareils électroniques sont interdits.

Exercice 1. (5 points)

Une aciérie peut produire de l'acier ou de l'inox à partir de fer ou de ferrailles recyclées. Une tonne de fer coûte 2k€ et une tonne de ferrailles coûte 3k€.

A partir d'une tonne de fer, l'usine peut produire 0,7 tonne d'acier ou 0,5 tonne d'inox. A partir d'une tonne de ferraille, l'usine peut produire 0,9 tonne d'acier. Les coûts de production (hors coût d'achat des matières premières) par tonne de produit utilisé sont données dans le tableau suivant :

Opération	Coût (k€)
Une tonne de fer en acier	4
Une tonne de fer en inox	5
Une tonne de ferrailles en acier	3

Une tonne d'acier se vend 10k€ et une tonne d'inox se vend 15k€. L'usine peut vendre au maximum 3000 tonnes d'acier et 1500 tonnes d'acier inoxydable. On cherche à maximiser le profit de l'aciérie.

Question 1. Modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire.

On considère pour la question suivante que une tonne d'acier peut être fondue et transformée en 0,6 tonne d'inox. Ceci coûte 6k€ par tonne d'acier transformée.

Question 2. En ajoutant cette nouvelle possibilité, modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Exercice 2. (5 points) On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll}
 \max & -x + 2y \\
 \text{s. c.} & 2x + y \leq 8 \\
 & 4x + 6y \leq 24 \\
 & x, y \geq 0
 \end{array}$$

Question 1. Représenter graphiquement l'espace des solutions admissibles.

Question 2. Combien y'a-t-il de points extrêmes ? Pour chacun, donner ses coordonnées.

Question 3. En s'aidant de la représentation graphique, donner la solution optimale de ce PL et expliciter la valeur optimale de l'objectif.

Exercice 3. (5 points)

Une étape de l'algorithme du simplexe est décrite ci-dessous (forme équation à gauche, forme tableau à droite) :

$$\begin{array}{rcl}
 z & = & 21 - 4x_2 + 7e_1 \\
 x_1 & = & 1 - x_2 + e_1 \\
 e_2 & = & 2 + 2x_2 - e_1 \\
 e_3 & = & 6 - x_2 - 2e_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c|cccccc|c}
 & z & x_1 & x_2 & e_1 & e_2 & e_3 & \\
 \hline
 z & 1 & 0 & 4 & -7 & 0 & 0 & 21 \\
 \hline
 x_1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 e_2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
 \hline
 e_3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 6
 \end{array}$$

Question 1. Indiquez les variables en base.

Question 2. Indiquez les variables hors base.

Question 3. Indiquez quelle est la solution de base (valeur de chaque variable), et combien vaut l'objectif z sur cette solution.

Question 4. Si on souhaite effectuer un pivotage, indiquez la variable qui entre en base et la variable qui sort de la base.

Question 5. Effectuez un pivotage.

Question 6. Est-ce que à l'issue de ce pivotage, la solution obtenue est optimale ?

Exercice 4. (5 points) Trois produits P_1 , P_2 et P_3 sont fabriqués en quantités respectives x_1 , x_2 et x_3 à partir de trois matières premières A , B et C . L'utilisation des matières premières au profit maximum (profit = z) est décrite par le programme suivant :

$$\begin{array}{rcl}
 \max z = & 20x_1 & + & 10x_2 & + & 6x_3 \\
 \text{s.c.} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 8 & \text{[limite A]} \\
 & 6x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 12 & \text{[limite B]} \\
 & 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 14 & \text{[limite C]} \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

Question 1. Écrivez le problème dual.

Question 2. Un étudiant pense que la solution optimale est $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 4$. En utilisant la propriété des écarts complémentaires, indiquez si cette solution est optimale. Si c'est le cas, donnez les valeurs des variables duales. Vous détaillerez le raisonnement.