Examen RO — L3 MIAGE 18 décembre 2018

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

— *Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.*
— *Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.*
— *Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.*
— *Les appareils électroniques sont interdits.*

Exercice 1. (5 points)

Une aciérie peut produire de l'acier ou de l'inox à partir de fer ou de férailles recyclées. Une tonne de fer coûte 2k€ et une tonne de férailles coûte 3k€.

A partir d'une tonne de fer, l'usine peut produire 0,7 tonne d'acier ou 0,5 tonne d'inox. A partir d'une tonne de féraille, l'usine peut produire 0,9 tonne d'acier. Les coûts de production (hors coût d'achat des matières premières) par tonne de produit utilisé sont données dans le tableau suivant :

Opération	**Coût** (k€)
Une tonne de fer en acier	4
Une tonne de fer en inox	5
Une tonne de férailles en acier	3

Une tonne d'acier se vend 10k€ et une tonne d'inox se vend 15k€. L'usine peut vendre au maximum 3000 tonnes d'acier et 1500 tonnes d'acier inoxydable. On cherche à maximiser le profit de l'aciérie.

Question 1. Modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Variables de décision

x_1 : nombre de tonnes de fer transformés en acier

x_2 : nombre de tonnes de fer transformés en inox

x_3 : nombre de tonnes de feraille transformés en acier

Modèle mathématique

$$\begin{aligned}
\max z = \quad & 10(0,7x_1 + 0,9x_3) + 15(0,5x_2) \\
& -(4x_1 + 5x_2 + 3x_3) - (2(x_1 + x_2) + 3x_3) \\
& \textit{sc.} \\
& 0,7x_1 + 0,9x_3 \leq 3000 \\
& 0,5x_2 \leq 1500 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

On considère pour la question suivante que une tonne d'acier peut être fondue et transformée en 0,6 tonne d'inox. Ceci coûte 6k€ par tonne d'acier transformée.

Question 2. En ajoutant cette nouvelle possibilité, modélisez ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Variables de décision

les trois variables de décision ci-dessus plus

x_4 : nombre de tonnes d'acier fondues pour obtenir de l'inox

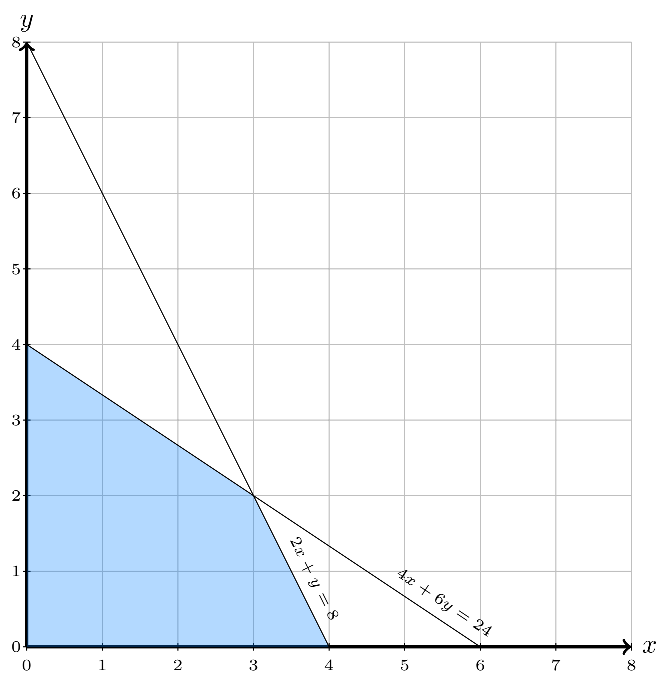
Modèle mathématique

$$\begin{aligned}
\max z= \quad & 10(0,7x_1 + 0,9x_3 - \mathbf{x_4}) + 15(0,5x_2 + \mathbf{0,6x_4}) \\
& -(4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + \mathbf{6x_4}) - (2(x_1 + x_2) + 3x_3) \\
& sc. \\
& 0,7x_1 + 0,9x_3 - \mathbf{x_4} \leq 3000 \\
& 0,5x_2 + \mathbf{0,6x_4} \leq 1500 \\
& x_4 \leq 0,7x_1 + 0,9x_3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Exercice 2. **(5 points)** On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & -x & + & 2y & & \\
\text{s. c.} & 2x & + & y & \leq & 8 \\
& 4x & + & 6y & \leq & 24 \\
& x & , & y & \geq & 0
\end{array}$$

Question 1. Représenter graphiquement l'espace des solutions admissibles.



Question 2. Combien y'a-t-il de points extrêmes ? Pour chacun, donner ses coordonnées.

Il y a quatre points e

Question 3. En s'aidant de la représentation graphique, donner la solution optimale de ce PL et expliciter la valeur optimale de l'objectif.

La solution optimale est $(0, 4)$, avec valeur $-1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8$.

Exercice 3. (5 points)

Une étape de l'algorithme du simplexe est décrite ci-dessous (forme équation à gauche, forme tableau à droite) :

$$\begin{array}{cccccccccccc} z & & + & 4x_2 & - & 7e_1 & & & & & = & 21 \\ & x_1 & + & x_2 & - & e_1 & & & & & = & 1 \\ & & - & 2x_2 & + & e_1 & + & e_2 & & & = & 2 \\ & & & x_2 & + & 2e_1 & & & + & e_3 & = & 6 \end{array}$$

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
z	1	0	4	-7	0	0	21
x_1	0	1	1	-1	0	0	1
e_2	0	0	-2	1	1	0	2
e_3	0	0	1	2	0	1	6

Question 1. Indiquez les variables en base.

> Les variables en base sont $\{x_1, e_2, e_3\}$.

Question 2. Indiquez les variables hors base.

> Les variables hors base sont $\{x_2, e_1\}$.

Question 3. Indiquez quelle est la solution de base (valeur de chaque variable), et combien vaut l'objectif z sur cette solution.

> La solution de base est $(x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = (1, 0, 0, 2, 6)$.

Question 4. Si on souhaite effectuer un pivotage, indiquez la variable qui entre en base et la variable qui sort de la base.

> e_1 entre et e_2 sort.

Question 5. Effectuez un pivotage.

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
z	1	0	-10	0	7	0	35
x_1	0	1	-1	0	1	0	3
e_1	0	0	-2	1	1	0	2
e_3	0	0	5	0	-2	1	2

Question 6. Est-ce que à l'issue de ce pivotage, la solution obtenue est optimale ?

> Non, le coefficient de x_2 est négatif, donc on n'est pas encore arrivé à une solution optimale.

Exercice 4. (5 points) Trois produits P_1, P_2 et P_3 sont fabriqués en quantités respectives x_1, x_2 et x_3 à partir de trois matières premières A, B et C. L'utilisation des matières premières au profit maximum (profit $= z$) est décrite par le programme suivant :

$$\begin{array}{llllllllll} \max z = & 20x_1 & + & 10x_2 & + & 6x_3 & & & \\ s.c. & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 8 & \text{[limite } A\text{]} \\ & 6x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 12 & \text{[limite } B\text{]} \\ & 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 14 & \text{[limite } C\text{]} \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Question 1. Écrivez le problème dual.

$$
\begin{array}{llllllll}
\min z = & 8y_A & + & 12y_B & + & 14y_C & & & \\
s.c. & 2y_A & + & 6y_B & + & 5y_C & \geq & 20 & \text{[produit } P_1\text{]} \\
 & y_A & + & 2y_B & + & y_C & \geq & 10 & \text{[produit } P_2\text{]} \\
 & y_A & + & y_B & + & 2y_C & \geq & 6 & \text{[produit } P_3\text{]} \\
 & y_A, & & y_B, & & y_C & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Question 2. Un étudiant pense que la solution optimale est $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 4$. En utilisant la propriété des écarts complémentaires, indiquez si cette solution est optimale. Si c'est le cas, donnez les valeurs des variables duales. Vous détaillerez le raisonnement.

Rajoutons des variables d'écart dans le primal puis dans le dual :

Primal :

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max z = & 20x_1 & + & 10x_2 & + & 6x_3 & & & & \\
s.c. & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & s_A & = & 8 & \text{[limite } A\text{]} \\
 & 6x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & s_B & = & 12 & \text{[limite } B\text{]} \\
 & 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & s_C & = & 14 & \text{[limite } C\text{]} \\
 & x_1, & x_2, & & x_3, & s_A, & & s_B, s_C & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Dual :

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min z = & 8y_A & + & 12y_B & + & 14y_C & & & & \\
s.c. & 2y_A & + & 6y_B & + & 5y_C & - & t_1 & = & 20 & \text{[produit } P_1\text{]} \\
 & y_A & + & 2y_B & + & y_C & - & t_2 & = & 10 & \text{[produit } P_2\text{]} \\
 & y_A & + & y_B & + & 2y_C & - & t_3 & = & 6 & \text{[produit } P_3\text{]} \\
 & y_A, & y_B, & & y_C, & t_1, & & t_2, t_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Faisons le tableau de correspondance des variables :

	Primal	Dual
Var. du primal avec var. d'écart du dual	x_1	t_1
	x_2	t_2
	x_3	t_3
Var. d'écart du primal avec var. du dual	s_A	y_A
	s_B	y_B
	s_C	y_C

Supposons que $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 4$ est une solution optimale du primal. Alors $s_A = 0$, $s_B = 0$ et $s_C = 2$. Donc, par le théorème des écarts complémentaires, $y_C = 0$, $t_2 = 0$ et $t_3 = 0$. Donc, $y_A + 2y_B = 10$ et $y_A + y_B = 6$. On obtient $y_B = 4$ et $y_A = 2$. Donc, la solution du dual obtenue est $(y_A, y_B, y_C) = (2, 4, 0)$, c'est bien une solution réalisable. La valeur de cette solution duale est $8 \cdot 2 + 12 \cdot 4 + 14 \cdot 0 = 64$. La solution optimale du primal est de valeur $20 \cdot 0 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 64$. Donc, la solution du primal proposée par l'étudiant est optimale, et la solution du duale trouvée est également optimale.