RO L3 MIAGE — Contrôle continu

11 octobre 2016

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

— *Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.*
— *Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.*
— *Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.*
— *Les appareils électroniques sont interdits.*
— *Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.*
— *Le document fait deux pages.*

Exercice 1. Facebook — 2 points

Démontrer qu'il y a au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis sur Facebook.

> On représente Facebook par un graphe G à n sommets, dont les sommets sont les utilisateurs et les arêtes représentent les amitiés. Supposons par l'absurde que tous les sommets sont de degré différent. Alors, comme tous les degrés sont entre 0 et $n-1$, la séquence des degrés est $(0, 1, \ldots, n-1)$. Ceci est impossible, car le sommet de degré $n-1$ est adjacent à tous les sommets, et le sommet de degré 0 n'est adjacent à aucun sommet. Donc, il existent deux sommets du même degré dans G.

Exercice 2. Matrices — 3 points

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Question 1. Dessinez le graphe G associé à la matrice d'adjacence A.

> Une étoile à 3 branches (1,3,4) avec 2 pour centre. Le sommet 5 est ensuite rajouté à 4.

Question 2. Donnez la séquence des degrés de ce graphe.

> $(1, 1, 1, 2, 3)$

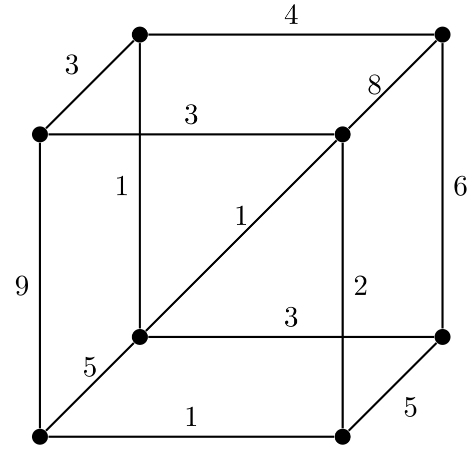
Question 3. Cette matrice est-elle une matrice d'incidence d'un graphe ?

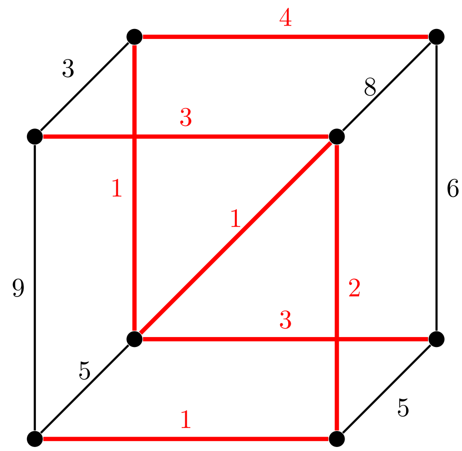
> Non ; il y a des colonnes dont la somme ne vaut pas 2.

Exercice 3. Arbre couvrant de poids minimum — 2 points

Donner un arbre couvrant de poids minimum du graphe suivant (indiquer l'algorithme choisi).

On représentera l'arbre obtenu en surlignant **distinctement** ses arêtes sur la feuille d'énoncé.



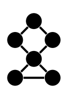


Exercice 4. Graphes eulériens — 2 points

Question 1. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles K_n (le graphe complet à n sommets) est eulérien.

K_n est eulérien pour tout $n > 1$ impair.

Question 2. Est-il vrai que le nombre d'arêtes d'un graphe eulérien avec un nombre pair de sommets est pair ?

Non ; par exemple  .

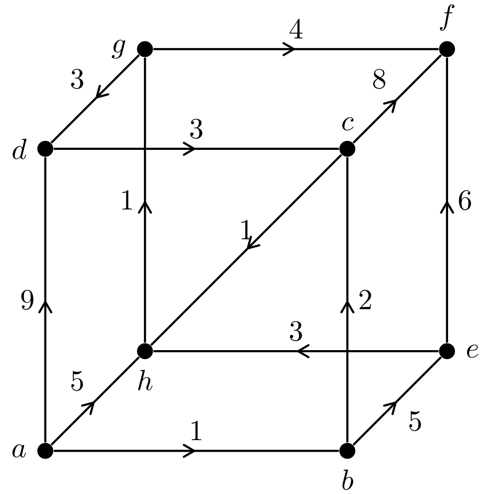
Exercice 5. Plus court chemin — 3 points

Question 1. Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la distance du sommet a aux autres sommets dans le réseau suivant.

v	a	b	c	d	e	f	g	h
$\mathrm{dist}(a, v)$	0	1	3	8	6	9	5	4

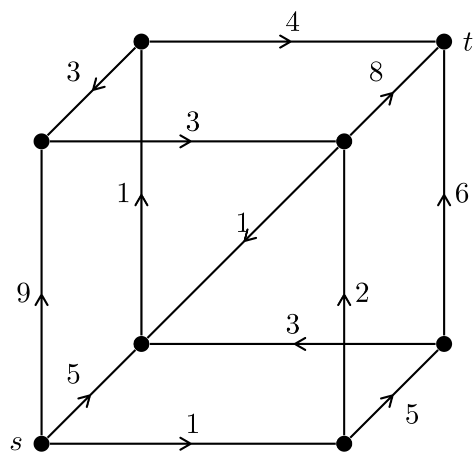
Question 2. Dans quel ordre l'algorithme traite-il les sommets ?

a, b, c, h, g, e, d, f



Exercice 6. **Flot-max/coupe-min — 5 points**

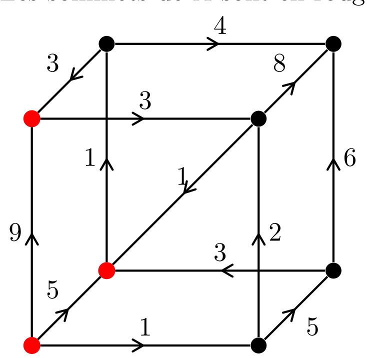
Soit G le réseau ci-dessous :



Question 1. Déterminer la valeur maximum d'un s–t flot dans G et indiquer l'algorithme choisi.

> La valeur d'un flot maximum est 5.

Question 2. Montrer une s–t coupe dans G dont la capacité est égale à la valeur du flot.

> Les sommets de A sont en rouge, ceux de B sont en noir :
>
> 
>
>
> La capacité de cette coupe est 5.

Exercice 7. **Madame Unetelle — 3 points**

Madame Unetelle a quatre filles. Dix de ses descendantes ont trois filles chacune, quinze ont deux filles et toutes les autres sont mortes sans avoir eu d'enfant. Combien de descendantes Madame Unetelle a-t-elle ?
(*Note : Les descendantes de Madame Unetelle sont ses filles, les filles de ses filles, etc.*)

> Soit $n-1$ le nombre de descendantes de Madame Unetelle. Considérer l'arbre généalogique T. T a n sommets (Madame Unetelle et les $n-1$ descendantes), dont 11 sommets de degré 4 (Madame Unetelle et les 10 descendantes avec trois filles chacune), 15 sommets de degré 3 et les autres $n-(11+15)=n-26$ sommets de degré 1. Soit m le nombre d'arêtes de T. On a $2n-2=2m=\sum_{v\in V(T)} d(v)=11\cdot 4+15\cdot 3+n-26=n+63$, donc $n-1=64$. On conclut que Madama Unetelle a 64 descendantes.