RO L3 MIAGE Contrôle continu

7 octobre 2015

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

— *Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.*
— *Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.*
— *Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.*
— *Les appareils électroniques sont interdits.*
— *Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.*
— *Le document fait deux pages.*

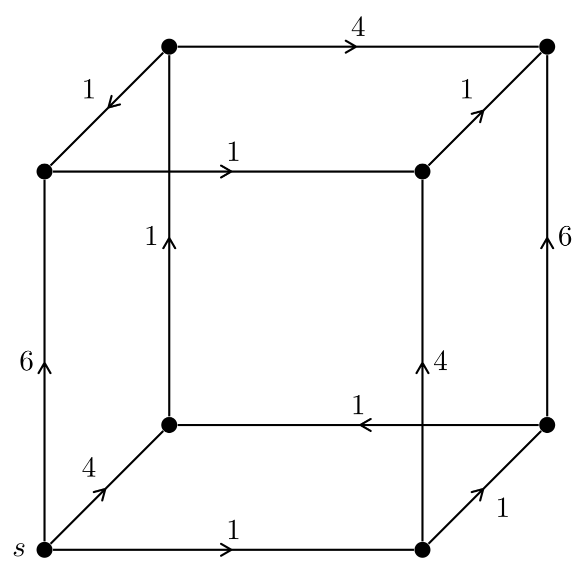
Exercice 1. Degrés — 5 points

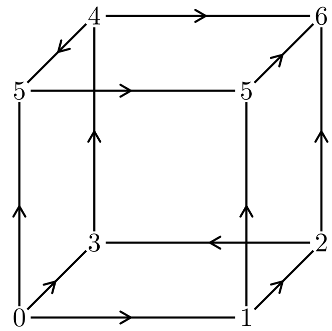
Soit G un graphe simple (au plus une arête entre chaque pair de sommets, chaque arête a deux extrémités distinctes) avec au moins deux sommets. Montrer que G contient deux sommets du même degré.

> Soit G un graphe à $n \geq 2$ sommets, et supposons par l'absurde que tous les sommets sont de degré différent. Alors, comme tous les degrés sont entre 0 et $n-1$, la séquence des degrés est $(0, 1, \ldots, n-1)$. Ceci est impossible, car le sommet de degré $n-1$ est adjacent à tous les sommets, et le sommet de degré 0 n'est adjacent à aucun sommet. Donc, il existent deux sommets du même degré dans G.

Exercice 2. Plus court chemin — 3 points

Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la distance du sommet s aux autres sommets dans le réseau suivant.





Exercice 3. Un archipel — 4 points

Dans un archipel de 7 îles, chaque île est reliée à au moins 3 autres îles par un pont. Peut-on se rendre d'une île quelconque à n'importe quelle autre île sans nager ?

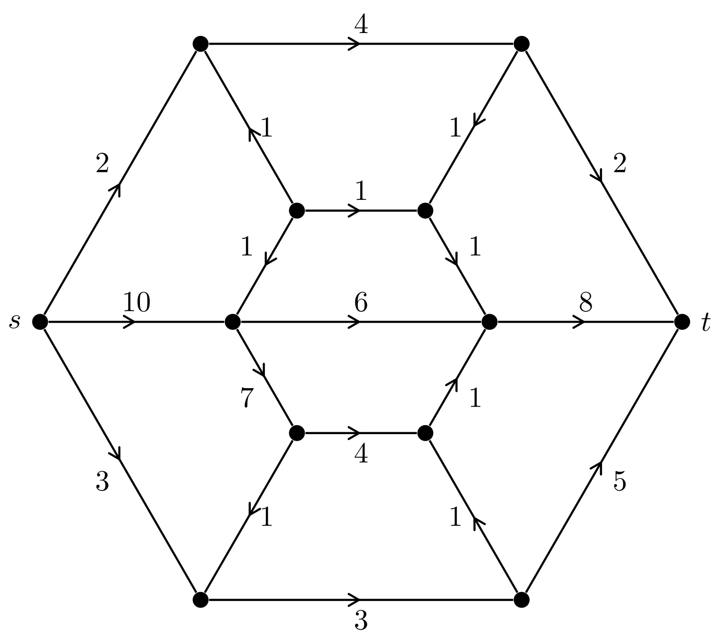
Oui, le graphe est connexe. Plus généralement, si $d(v) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ pour tout sommet v de G, alors G est connexe :
Supposons par l'absurde que G possède plus qu'une composante connexe. Dans ce cas, puisque G contient n sommets, au moins une composante connexe de G contient un nombre de sommets inférieur ou égal à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Soit G' une telle composante connexe de G et n' le nombre de sommets de G'. Comme il n'y a pas d'arêtes entre G' et le reste du graphe, et $0 \leq d(v) \leq n-1$, on a

$$d_G(v) = d_{G'}(v) \leq n' - 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1,$$

ce qui contredit l'hypothèse $d_G(v) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Exercice 4. Flot-max/coupe-min — 5 points

Soit G le réseau ci-dessous :

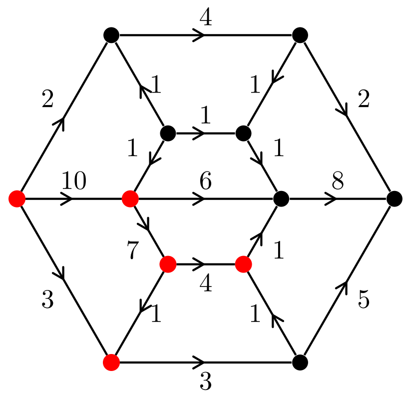


Question 1. Déterminer la valeur maximum d'un s–t flot dans G et indiquer l'algorithme choisi.

La valeur d'un flot maximum est 12.

Question 2. Montrer une s–t coupe dans G dont la capacité est égale à la valeur du flot.

Les sommets de A sont en rouge, ceux de B sont en noir :

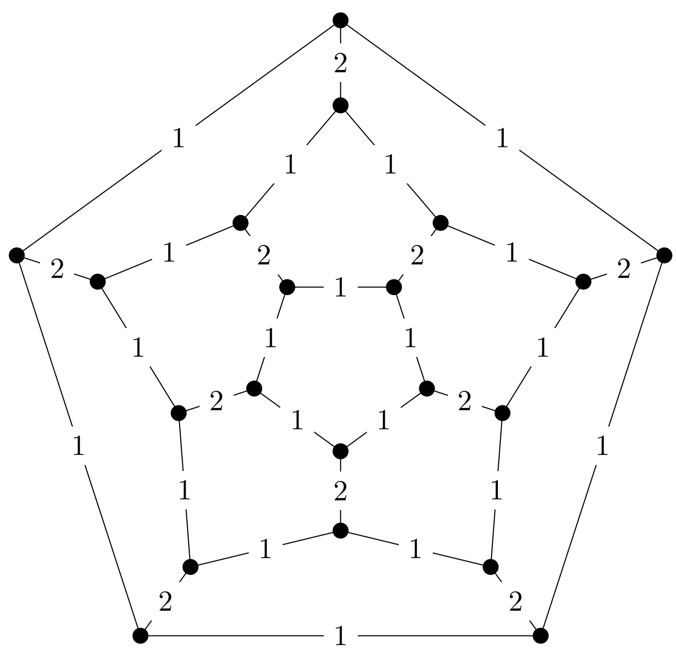


La capacité de cette coupe est 12.

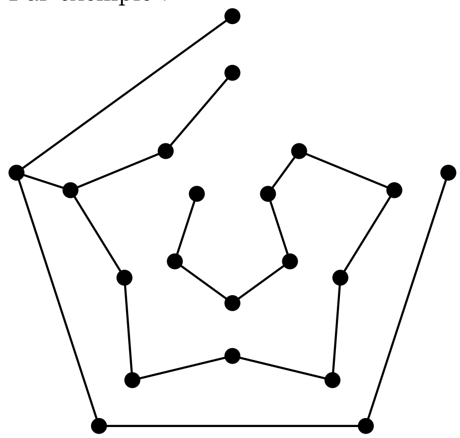
Exercice 5. Arbre couvrant de poids minimum — 3 points

Donner un arbre couvrant de poids minimum du graphe suivant (indiquer l'algorithme choisi).

On représentera l'arbre obtenu en surlignant **distinctement** ses arêtes sur la feuille d'énoncé.



Par exemple :



(pas unique)