# Connexité et arbres

*INF303* *TD4*

## Chaînes, cycles et connexité

**Exercice 1**. Montrer qu'un graphe simple de degré minimum au moins $k$ contient une chaîne élémentaire de longueur $k$.

**Exercice 2**. Peut-on avoir un graphe de degré minimum supérieur ou égale à 2 sans cycle ?

**Exercice 3**. Soit $G$ un graphe simple dont exactement deux sommets $x$ et $y$ sont de degré impair. Montrer qu'il existe une chaîne dans $G$ de $x$ à $y$.

**Exercice 4**. Peut-on avoir deux chaînes élémentaires disjointes de longueur maximum dans un graphe connexe ?

**Exercice 5**. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ quelconque, le *graphe complémentaire* est défini comme $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$. C'est-à-dire, les arêtes de $\overline{G}$ sont les « non-arêtes » de $G$.

Existe-t-il un graphe non connexe $G$ tel que le graphe complémentaire $\overline{G}$ n'est pas connexe non plus ?

**Exercice 6**. Soit $G$ un graphe simple à $n$ sommets et $m$ arêtes. Montrer que si $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, alors $G$ est connexe.

**Exercice 7**. **Un archipel**

Dans un archipel de 7 îles, chaque île est reliée à au moins 3 autres îles par un pont. Peut-on se rendre d'une île quelconque à n'importe quelle autre île sans nager ?

Généraliser ce résultat.

## Arbres

**Exercice 8**. Trouver tous les arbres à 6 sommets, à isomorphisme près.

**Exercice 9**. **Le château d'eau**

Une communauté de commune veut desservir un ensemble de villages en eau potable à partir d'un château d'eau placé dans l'un des villages. Selon des paramètres législatifs, géologiques, etc., le coût d'installation des canalisations pour transporter l'eau est estimé pour certaines paire de villages. Certains villages ne peuvent pas être reliés directement à cause du relief. On suppose que les capacités des canalisations sont illimitées. Il faut déterminer un réseau qui puisse acheminer de l'eau dans chaque village, et ce au moindre coût.

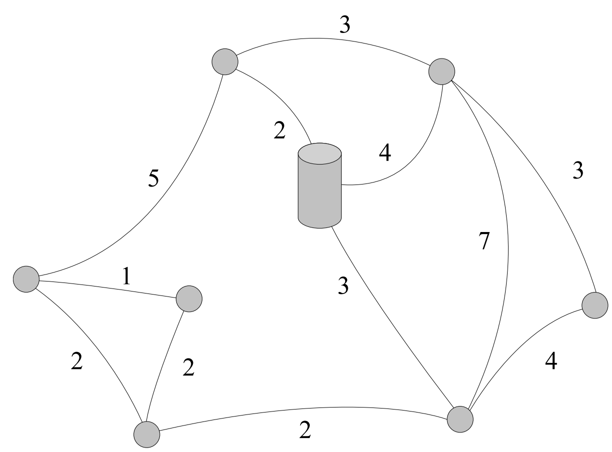



FIGURE 1 – Le château d'eau est représenté par le cyclindre, les disques étant les villages à desservir. Les chiffres représentent les coûts de liaison entre deux villages.

*Question 1.* Trouvez une solution pour ce problème en utilisant l'algorithme de Kruskal.

**Exercice 10**. Soit $T$ un arbre comportant au moins 3 sommets de degré 1.

*Question 1.* Montrer que $T$ contient au moins un sommet de degré superieur à 2.

**Exercice 11**. Montrer qu'un graphe $G$ est connexe si et seulement si il contient un arbre couvrant.

**Exercice 12**. Soit $G$ un graphe a $n \geq 5$ sommets. Montrez que $G$ ou $\overline{G}$ doit contenir un cycle.

**Exercice 13**. On considère l'algorithme de Kruskal inversé où on commence avec un graphe qui contient toutes les arête de $G$, puis où on enlève les arêtes de plus gros poids tant que le graphe reste connexe.
Appliquer cet algorithme pour l'exercice 2 puis demontrer qu'il renvoit bien un arbre couvrant de poids minimum.

**Exercice 14**. **L'algorithme de Prim**

Cet exercice présente un autre algorithme pour le problème de l'arbre couvrant minimal. Il s'agit de l'*algorithme de Prim*.

---

**Algorithm 1:** $Prim(G, w)$

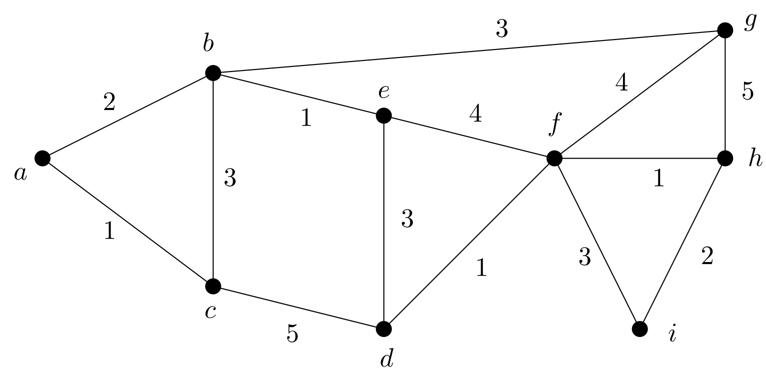
---

**Entrées**: Un graphe $G$ et une fonction de poids $w$ sur les arêtes.
**Sorties**: Un ensemble d'arêtes $A$ formant un arbre couvrant de poids minimum.
**début**

```
A ← ∅;
Choisir arbitrairement un sommet s et le marquer;
tant que il existe un sommet non-marqué adjacent à un sommet marqué faire
    Trouver un sommet y non-marqué, adjacent à un sommet marqué x,
    minimisant le poids de l'arête xy;
    A ← A ∪ {xy};
    Marquer y ;
Retourner A ;
```

---

*Question 1.* Appliquer cet algorithme au graphe pondéré suivant, en choisissant `s=`$a$ à la première étape :




*Question 2.* Démontrer que le graphe $T$ retourné par l'algorithme `Prim` est un arbre couvrant de $G$.

*Question 3.* Montrer par récurrence qu'à chaque étape de l'algorithme, il existe un arbre couvrant de poids minimum de $G$ comportant les arêtes contenues dans l'ensemble $A$ courant. On pourra utiliser le fait qu'ajouter une arête à un arbre crée nécessairement un cycle.