Examen INF303 12 janvier 2018

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

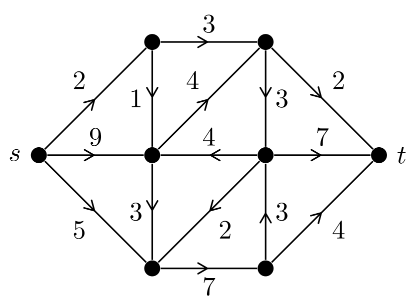
— *Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.*
— *Le barème (sur 22 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.*
— *Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.*
— *Les appareils électroniques sont interdits.*
— *Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.*
— *Le document fait deux pages.*

Exercice 1. (3 points)

Soit G un graphe biparti et k-régulier (tous les sommets ont degré $k \geq 1$). En utilisant le lemme des mariages, montrer que G a un couplage parfait.

> Soit (A,B) la bipartition de G. Comme $k|A| = \delta(A) = \delta(B) = k|B|$ et $k \neq 0$, on a $|A| = |B|$. Soit $X \subseteq A$. Grâce à la régularité de G, on a $|\delta(X)| = k|X|$. Chaque sommet dans $N(X)$ est de degré k, donc $|\delta(N(X))| = k|N(X)|$. Comme $\delta(X) \subseteq \delta(N(X))$, on a $k(X) = |\delta(X)| \leq |\delta(N(X))| = k|N(X)|$. Donc, G a un couplage parfait par le lemme des mariages.

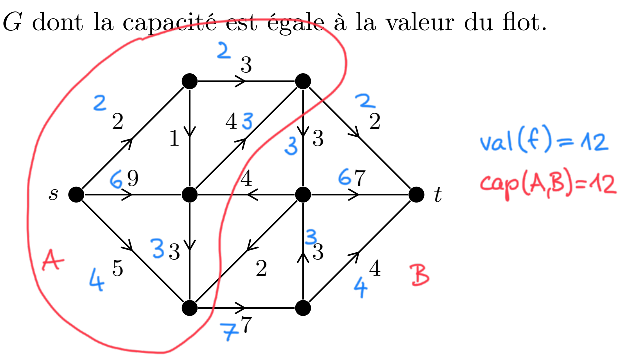
Exercice 2. (4 points)



Question 1. Déterminer la valeur maximum d'un s–t flot dans le réseau G ci-dessus et indiquer l'algorithme choisi.

> En utilisant l'algorithme de Ford–Fulkerson, on trouve un flot de valeur x.

Question 2. Montrer une s–t coupe dans G dont la capacité est égale à la valeur du flot.



Exercice 3. (3 points)

Question 1. Montrer que dans une coloration optimale d'un graphe G (c'est-à-dire une coloration avec $\chi(G)$ couleurs), il existe un sommet de chaque couleur qui "voit" toutes les autres couleurs.

Soit c une coloration optimale de G, et supposons par l'absurde qu'aucun sommet de G de colorié avec la couleur i n'est adjacent à des sommets de toutes les autres couleurs. Soit A l'ensemble des sommets coloriés avec la couleur i. On peut recolorier chaque sommet $v \in A$ par une couleur parmi $\{1,2,\dots,\chi(G)\} \setminus \{i\}$ (par l'hypothèse, il existe au moins une couleur que v ne voit pas). Comme A est forcément un stable, on obtient ainsi une coloration de G avec $\chi(G) - 1$ couleurs — contradiction.

Question 2. En déduire que tout graphe G a au moins $\chi(G)$ sommets de degré au moins $\chi(G) - 1$.

Chaque classe chromatique dans une coloration optimale de G contient un sommet qui voit toutes les autres couleurs, et ce sommet a forcément degré au moins $\chi(G) - 1$. Il y a $\chi(G)$ classes chromatiques, donc il y a au moins $\chi(G)$ sommets de degré au moins $\chi(G) - 1$.

Exercice 4. (3 points)

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières optionnelles : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Internet(I), Sport (S) ; les profils des candidats à options multiples sont : F-A-M ; D-S ; I-S ; I-M.

Question 1. Quel est le nombre maximum d'épreuves que l'on peut mettre en parallèle ?

On peut modéliser le problème par un graphe G, dont les sommets sont les matières, avec une arête entre deux sommets ssi il y a au moins un étudiant inscrit dans les deux matières. Le nombre maximum d'épreuves que l'on peut mettre en parallèle correspond alors à la taille maximum d'un stable de G, qu'on note $\alpha(G)$. On trouve que $\alpha(G) = 3$. Donc, on peut mettre trois options en parallèle.

Question 2. Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

Le temps minimal correspond au nombre chromatique de G ; on trouve que $\chi(G) = 3$. Donc, il faut 3 demi-journées.

Exercice 5. (3 points)

Soit $G[X,Y]$ un graphe biparti avec $|X| = r$ et $|Y| = s$. On pose $n = r + s$ le nombre de sommets de G.

Question 1. Montrer que $|E(G)| \leq rs$.

Il y a r sommets dans X, chacun de degré au plus s. Donc, $|E(G)| = \sum_{v \in X} d(v) \leq rs$.

Question 2. En déduire que $|E(G)| \leq n^2/4$.

Soit $\lambda = \frac{r}{n}$. Comme $n = r + s$, on a $s = (1 - \lambda)n$. Par la question précédente, $|E(G)| \leq rs = \lambda(1 - \lambda)n^2$. Or, $\lambda(1 - \lambda) = \lambda - \lambda^2 = \frac{1}{4} - (\lambda - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$, donc $|E(G)| \leq \frac{1}{4}n^2$.

Question 3. Décrire les graphes simples bipartis G pour lesquels $|E(G)| = n^2/4$.

Ce sont les graphes bipartis complets avec le même nombre de sommets dans chaque partie de la bipartition : $K_{r,r}$.

Exercice 6. (3 points)

Question 1. Vérifier que la formule d'Euler est fausse sur les graphes planaires non connexes en donnant un exemple.

$n = 2$
$m = 0$
$f = 1$

$n - m + f = 3 \neq 2$

Question 2. Trouver une généralisation de la formule d'Euler fonctionnant pour tous les graphes planaires et prouver la (en faisant une récurrence sur le nombre de composantes connexes).

Soit G un graphe planaire plongé dans le plan. Soient n,m,f,c le nombre de sommets, arêtes, faces, et composantes connexes, respectivement. Alors, $n - m + f = c - 1$.
Pour prouver cette identité, on utilise la récurrence sur c. Soit $A(c)$ l'assertion "Tout graphe plongé dans le plan ayant n sommets, m arêtes, f faces et c composantes connexes vérifie $n - m + f = c - 1$".
Le cas de base, $A(1)$, est vrai grâce à la formule d'Euler. Supposons que $A(c)$ est vrai pour un $c \geq 1$, et soit G un graphe plongé dans le plan avec n sommets, m arêtes, f faces et $c + 1$ composantes connexes. Ajoutons à G une arête entre deux sommets dans des composantes connexes différentes. Le nouveau graphe G' a n sommets, $m + 1$ arêtes, f faces et c composantes connexes. Par l'hypothèse de récurrence, on a $n - (m + 1) + f = c + 1$, donc $n - m + f = (c + 1) + 1$, donc $A(c + 1)$ est vraie.

Exercice 7. (3 points)

```
Entrées : Un tableau t de n entiers
pour i = 1 à n faire
    min ← i
    pour j = 1 à n faire
        si t[j] < t[min] alors
            min ← j
    si min ≠ i alors
        échanger t[i] et t[min]
```

Question 1. Que fait cet algorithme ?

L'algorithme trie les éléments de t du plus petit au plus grand.

Question 2. Quelle est sa complexité ?

La complexité est de $O(n^2)$.