Examen INF303 21 décembre 2018

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

— *Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.*
— *Le barème est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.*
— *Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.*
— *Les appareils électroniques sont interdits.*
— *Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.*
— *Le document fait deux pages.*

Exercice 1. (3 points)

Étant donné un graphe G, le *graphe complémentaire* $\overline{G}$ est le graphe avec le même ensemble de sommets, où uv est une arête si et seulement si uv n'est pas une arête de G.

Question 1. Est-il vrai que le complémentaire d'un graphe connexe est connexe ?

> Non ; par exemple, le graphe complémentaire de K_2 consiste de deux sommets isolés.

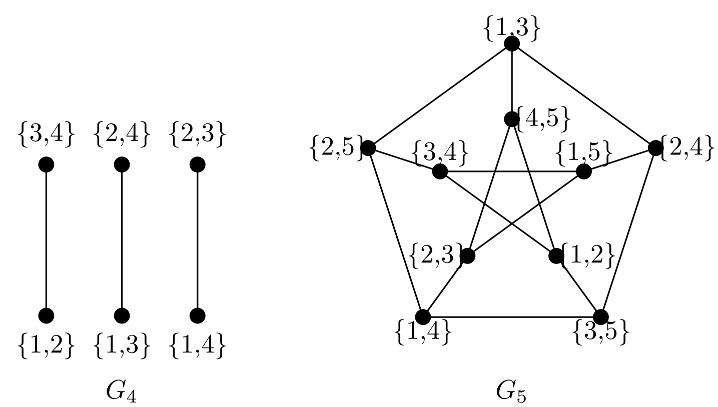
Question 2. Est-il vrai que le complémentaire d'un graphe non connexe est connexe ?

> Oui. Soient u,v deux sommets de G. Si u,v sont dans la même composante connexe de G, alors soit w un sommet dans une autre composante connexe de G. Comme uw et vw sont des arêtes de $\overline{G}$, on voit bien qu'il existe une chaîne qui relie u et v dans $\overline{G}$. Si u,v sont dans des différentes composantes de G, alors uv est une arête de $\overline{G}$ (et donc une chaîne qui relie u et v dans $\overline{G}$). Cela démontre que $\overline{G}$ est connexe.

Exercice 2. (5 points)

On considère le graphe G_n dont les sommets sont tous les sous-ensembles de $\{1,2,\ldots,n\}$ à deux éléments, et où il y a une arête entre les sommets u et v si les ensembles correspondants n'ont aucun élément en commun. Par exemple, $\{1,3\}$ et $\{2,4\}$ sont deux sommets adjacents de G_4 ; $\{1,3\}$ et $\{2,3\}$ sont deux sommets non adjacents de G_4.

Question 1. Dessiner G_4 et G_5.



Question 2. Quel est le nombre chromatique de G_4 et de G_5 ?

> $\chi(G_4) = 2$ et $\chi(G_5) = 3$.

Question 3. Quel est le nombre de sommets de G_n (en fonction de n) ?

> $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$

Question 4. Quel est le degré de chaque sommet de G_n (en fonction de n) ?

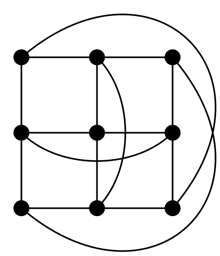
> $\binom{n-2}{2} = (n-2)(n-3)/2$

Question 5. Quel est le nombre d'arêtes de G_n (en fonction de n) ?

> $n(n-1)(n-2)(n-3)/8$

Exercice 3. (5 points)

Soit G le graphe ci-dessous.



Question 1. Prouver que $\chi(G) \leq 4$.

> Il suffit de trouver une 4-coloration de G ; par exemple :
>
> $$\begin{matrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Question 2. Prouver que $\chi(G) \geq 3$.

> Les trois sommets dans la colonne centrale forment une clique, donc $\omega(G) \geq 3$ et on conclut que $\chi(G) \geq \omega(G) \geq 3$.

Question 3. Prouver que $\chi(G) = 4$.

> Grâce à la question 1, il suffit de montrer que $\chi(G) > 3$. Supposons par l'absurde qu'il existe une 3-coloration c de G. Supposons que la couleur du sommet central est 1. Alors, la couleur des 4 sommets adjacents au sommet central sont 2 et 3, on doit avoir un sommet de couleur 2 et un sommet de couleur 3 dans la colonne centrale et dans la rangée centrale. Par symétrie, deux sommets “coins” opposés sont adjacents à un sommet de couleur 2 et un sommet de couleur 3. Comme ils sont adjacents, ils ne peuvent pas recevoir la couleur 1 tous les deux. Contradiction. On conclut que $\chi(G) = 4$

Question 4. En utilisant le théorème de Kuratowski (ou autrement), montrer que G n'est pas planaire.

> On peut trouver une subdivision de $K_{3,3}$ comme sous-graphe. Par exemple, considérer le graphe auquel on a supprimé les 3 arêtes incidentes aux sommets de la rangée centrale, aussi bien qu'une arête incidente aux sommets de la colonne centrale. Ce graphe est une subdivision de $K_{3,3}$.

Exercice 4. (3 points)

Soit G un graphe biparti, avec bipartition $V(G) = A \cup B$, qui satisfait la condition suivante pour un entier $d \geq 0$ fixé :

$$|N(X)| \geq |X| - d \text{ pour tout } X \subseteq A.$$

Question 1. Soit G' le graphe obtenu à partir de G en ajoutant d nouveaux sommets à B, chacun relié à tous les sommets de A. Montrer que G' a un couplage de taille au moins $|A|$.

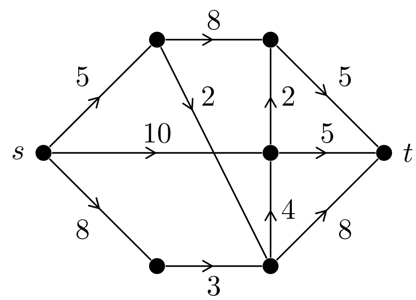
> Soit $X \subseteq A$. Alors, $|N_{G'}(X)| \geq |N_G(X)| + d \geq |X| - d + d = |X|$. Par le théorème de Hall, G' a un couplage qui sature A, avec au moins $|A|$ arêtes.

Question 2. En déduire que G a un couplage de taille au moins $|A| - d$.

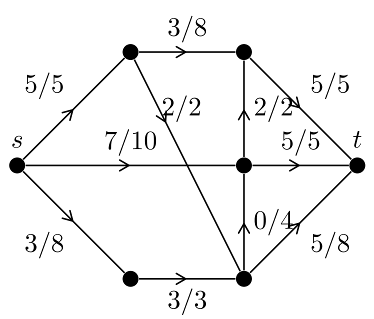
> Soit M un couplage de G' de taille $|A|$, et soit D l'ensemble de nouveaux sommets qu'on a ajouté à G. Au plus d arêtes de M sont incidentes à un sommet de D, donc $M \setminus \delta(D)$ est un couplage de taille au moins $|A| - d$.

Exercice 5. (4 points)

Soit G le réseau ci-dessous :

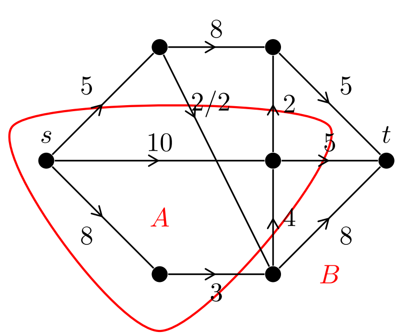


Question 1. Déterminer la valeur maximum d'un s–t flot dans G et indiquer l'algorithme choisi.



> La valeur d'un flot maximum est 15.

Question 2. Montrer une s–t coupe dans G dont la capacité est égale à la valeur du flot.



> Coupe de capacité 15.