

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

- Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.
- Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.
- Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.
- Les appareils électroniques sont interdits.
- Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.
- Le document fait deux pages.

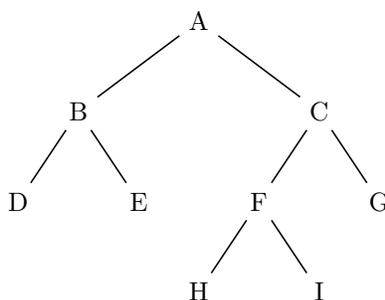
Exercice 1. (2 points)

Étant donné un mot, un anagramme est un mot (qui peut ne pas avoir de sens) avec les même lettres, chaque lettre apparaissant le même nombre de fois que dans le mot original.

Combien le mot CORONAVIRUS a-t-il d'anagrammes ? (Donnez une expression utilisant des factorielles.)

Exercice 2. (2 points)

Voici l'arbre T :



Écrire le mot formé par les sommets de T selon le parcours en :

1. profondeur préfixé ;
2. profondeur infixé ;
3. profondeur postfixé ;
4. largeur.

Exercice 3. (2 points)

Certains pays de la zone euro ont cessé d'utiliser les pièces de 1 centime. Utiliser la récurrence pour montrer qu'avec des pièces de 2 et de 5 centimes, on peut exprimer tout montant à partir de 4 centimes.

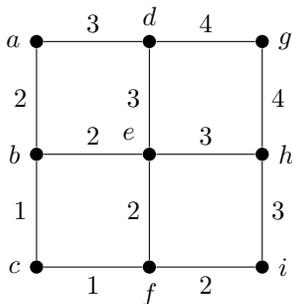
Exercice 4. (2 points) *N'oubliez pas de justifier vos réponses !*

Question 1. Existe-t-il un graphe dont la suite des degrés est 1,1,1,2,3,3,3 ?

Question 2. Existe-t-il un arbre avec la même suite des degrés ?

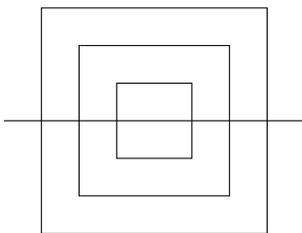
Exercice 5. (2 points)

Utiliser l'algorithme de Kruskal pour trouver un arbre couvrant de poids minimum du graphe suivant. Dessiner l'arbre et donner son poids.

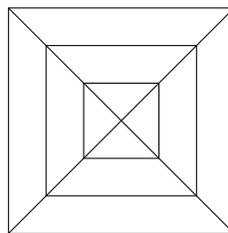


Exercice 6. (2 points)

Pour chacune des deux figures suivantes, décider s'il est possible de la dessiner sans lever le crayon et sans repasser plusieurs fois par le même segment. (On attend une justification *sans dessiner*). Si ce n'est pas possible, combien de fois faut-il lever le crayon ?



(a)



(b)

Exercice 7. (3 points)

Dans chacun des exemples suivants, dites si la matrice utilisée peut être une matrice d'adjacence, d'incidence ou ne pas représenter un graphe. Dans les deux premiers cas, dessinez un graphe correspondant, dans le dernier cas, justifiez pourquoi.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. (5 points)

Question 1. Prouver par récurrence que tout ensemble à n éléments contient 2^n sous-ensembles. (Par exemple, les $2^2 = 4$ sous-ensembles de $\{1,2\}$ sont : $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$.)

Soit E un ensemble de cinq entiers entre 1 et 8. (Par exemple, $E = \{1,3,4,6,8\}$.)

Question 2. Dédurre de la question 1 qu'il y a exactement 31 sous-ensembles non vides de E .

Question 3. Montrer que la somme des éléments d'un sous-ensemble non vide de E vaut entre 1 et 30.

Question 4. En utilisant les questions 2 et 3, déduire qu'il existe deux sous-ensembles *disjoints* de E avec la même somme. (Dans l'exemple, la somme des éléments de $\{1,3,4\}$ est la même que la somme des éléments de $\{8\}$.)