Contrôle continu — INF303 26 octobre 2018

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

- *Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.*
- *Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.*
- *Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.*
- *Les appareils électroniques sont interdits.*
- *Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.*
- *Le document fait deux pages.*

Exercice 1. (2 points)

On dispose de n bonbons identiques. De combien de façons peut-on les répartir entre k enfants ($k \leq n$) si on doit donner au moins un bonbon à chacun ?

> $\binom{n-1}{k-1}$; c'est le nombre de partitions de n en k parties.

Exercice 2. (2 points)

Étant donné un mot, un anagramme est un mot (qui peut ne pas avoir de sens) avec les même lettres, chaque lettre apparaîssant le même nombre de fois que dans le mot original.

Combien d'anagrammes du mot BAOBAB y a-t-il ?

> $\frac{6!}{3!2!} = 60$.

Exercice 3. (2 points)

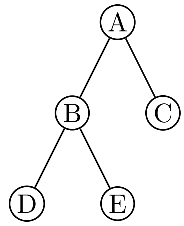
Prouvez l'identité suivante par récurrence sur n (où $n \geq 1$) :

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

> Soit $P(n)$ la proposition "$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$". Cas de base : $n = 1$. On a $1^2 = \frac{1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}{3}$, donc $P(1)$ est vrai. Supposons que $P(n)$ est vrai (pour $n \geq 1$). On a
>
> $$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2 &= \left(1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2\right) + (2n+1)^2 \\ &= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\ &= \frac{(2n+1)\left(n(2n-1) + 3(2n+1)\right)}{3} \\ &= \frac{(2n+1)\left(2n^2+5n+3\right)}{3} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)(2n+3)}{3}, \end{aligned}$$
>
> donc $P(n+1)$ est vrai.

Exercice 4. (2 points)

Voici l'arbre T :



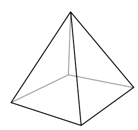
Écrire le mot formé par les sommets de T selon le parcours en :

1. profondeur préfixé ;
2. profondeur infixé ;
3. profondeur postfixé ;
4. largeur.

> 1. ABDEC ;
> 2. DBEAC ;
> 3. DEBCA ;
> 4. ABCDE.

Exercice 5. **(3 points)**

On dispose d'un fil de fer de 80 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de pyramide dont *toutes* les arêtes sont de 10 cm, sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?



> Comme il y a 8 arêtes de 10 cm, et on a 80 cm de fil, c'est possible de construire la carcasse sans couper le fil ssi le graphe G de la pyramide possède un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne. Or, le nombre de 4 sommets de G sont de degré impair, donc ce n'est pas possible. C'est possible avec une seule coupe : il suffit d'enlever une arête de la base de la pyramide pour obtenir un graphe connexe avec 2 sommets de degré impair, qui possède une chaîne eulérienne.

Exercice 6. **(3 points)**

Considérons un archipel de cinq îles. Une compagnie veut relier les îles par un réseau de câble optique. Le coût d'installation d'un câble entre les îles i et j est a_{ij}, où $A = (a_{ij})$ est donné par la matrice ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 5 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 2 & 8 \\ 7 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 9 & 4 & 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

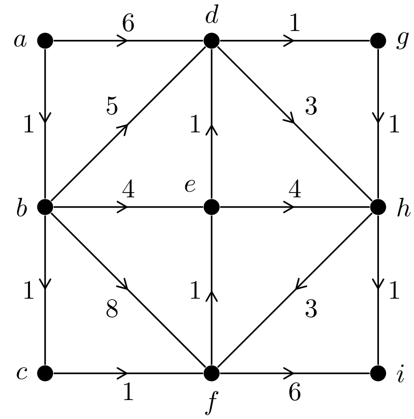
Trouver le coût minimum d'installation d'un réseau de câble optique qui relie toutes les îles. Quel algorithme avez-vous utilisé ?

> L'arbre couvrant de poids minimum est de poids 13. On l'a trouvé avec l'algorithme de Kruskal (ou de Prim).

Exercice 7. **(3 points)**

Question 1. Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la distance du sommet a aux autres sommets dans le réseau suivant.

Question 2. Dans quel ordre l'algorithme traite-il les sommets ?



a	b	c	d	e	f	g	h	i
0	1	2	5	4	3	6	7	8

Ordre de traitement des sommets : a,b,c,f,e,d,g,h,i

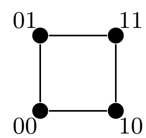
Exercice 8. **(3 points)**

Soit $d \geq 1$ un entier. Le graphe H_d est défini de la façon suivante :

— ses sommets sont les mots de longueur d que l'on peut écrire avec 0 et 1.

— deux mots sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent d'exactement une lettre.

Par exemple, H_2 est le graphe ci-dessous :



Question 1. Donner le nombre de sommets de H_d.

2^d (c'est le nombre de mots de longueur d sur $\{0,1\}$).

Question 2. Quels sont les degrés de H_d ?

Pour chaque mot ω de longueur d sur $\{0,1\}$, il y a exactement d mots de longueur d qui diffèrent de ω dans un seul bit : ils correspondent aux mots où on change le 1er, 2ème, ..., $d$ème bit. Donc, le degré de chaque sommet de H_d est d.

Question 3. En déduire le nombre d'arêtes de H_d.

On a $d \cdot 2^d = \sum_{v \in V(H_d)} d(v) = 2|E(H_d)|$, d'où $|E(H_d)| = d \cdot 2^{d-1}$.