Contrôle continu — INF303 25 octobre 2017

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

- *Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.*
- *Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.*
- *Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.*
- *Les appareils électroniques sont interdits.*
- *Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.*
- *Le document fait deux pages.*

Exercice 1. (3 points) On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes. **L'ordre des cartes dans la main ne joue aucune rôle.**

Question 1. Combien y a-t-il de mains différentes ?

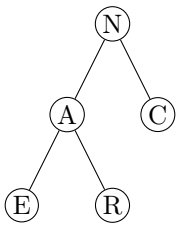
Question 2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?

Question 3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?

Question 4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

Exercice 2. (2 points)

Voici l'arbre A :



Écrire le mot formé par les sommets de A selon le parcours en :

1. profondeur préfixé ;
2. profondeur infixé ;
3. profondeur postfixé ;
4. largeur.

Exercice 3. (2 points)

Soit G un graphe acyclique (une forêt) sur n sommets, m arêtes et $k \geq 1$ composantes connexes. Prouvez que $m = n - k$ par récurrence sur k.

Exercice 4. (3 points) Considérons un ensemble de cinq villes qui doivent être reliées par un réseau routier. Le coût de construction d'une route entre les villes i et j est a_{ij}, où $A = (a_{ij})$ est donné par la matrice ci-dessous (un coup de $+\infty$ signifie qu'on ne peut pas construire de route) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & +\infty & 10 \\ 11 & 9 & +\infty & 0 & 7 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

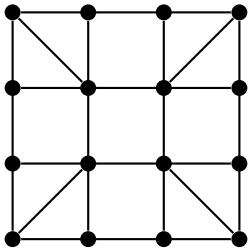
Question 1. Trouver le coût minimum d'un réseau routier qui connecte toutes les villes. Quel algorithme avez-vous utilisé ?

Exercice 5. **(2 points)**

Soit T un arbre avec un sommet de degré 1000. Est-il possible que T contienne moins de 1000 sommets de degré 1 ?

Exercice 6. **(3 points)**

Une ville est composée de 28 rues, toutes de longueur 1, qui correspondent aux arêtes du graphe suivant.



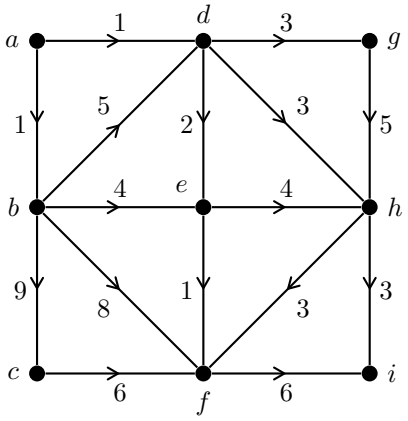
Question 1. Le graphe est-il eulérien (c'est-à-dire, contient-il un cycle eulérien) ? Sinon, combien d'arêtes au minimum faut-il ajouter pour rendre le graphe eulérien ?

Question 2. Existe-t-il un tour de la ville (démarrant et arrivant au même endroit) qui passe au moins une fois par toute les rues de longueur 32 ? de longueur 36 ?

Exercice 7. **(3 points)**

Question 1. Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la distance du sommet a aux autres sommets dans le réseau suivant.

Question 2. Dans quel ordre l'algorithme traite-il les sommets ?



Exercice 8. **(2 points)**

Soit $G[X,Y]$ un graphe biparti (c'est à dire que $V(G) = X \cup Y$ et que X et Y sont des stables, autrement dit toutes les arêtes de G ont une extrémité dans X et l'autre dans Y).

Question 1. Montrer que $\Sigma_{v \in X} d(v) = \Sigma_{v \in Y} d(v)$

Question 2. En déduire que si G est k-régulier ($k \geq 1$), alors $|X| = |Y|$. (Un graphe est *k-régulier* si tous ses sommets sont de degré exactement k).