Contrôle continu — INF303 26 octobre 2016

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

— *Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.*
— *Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.*
— *Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.*
— *Les appareils électroniques sont interdits.*
— *Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.*
— *Le document fait deux pages.*

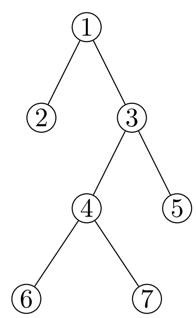
Exercice 1. (2 points)

Un anagramme d'un mot M est un mot (qui peut ne pas avoir de sens) qui a les même lettres que M, chacune apparaîssant le même nombre de fois que dans M.

Question 1. Combien le mot RESSASSER a-t-il d'anagrammes ? (Donnez une expression utilisant des factorielles.)

Exercice 2. (2 points)

Voici l'arbre A :



Écrire l'ordre des sommets de A selon le parcours en :

1. profondeur préfixé ;
2. profondeur infixé ;
3. profondeur postfixé ;
4. largeur.

Exercice 3. (5 points)

Dans cet exercice, on considère des arbres « d'informaticien » binaires, comme vu en TP. On a donc une racine en haut, des feuilles en bas, et chaque noeud peut avoir 0, 1 ou 2 fils.

Question 1. Prouver par récurrence sur n qu'un arbre binaire complet de profondeur n possède 2^n feuilles.

Question 2. Prouver par récurrence sur n que tout arbre binaire A de profondeur n vérifie la relation suivante : $n_i(A) \geq n_f(A) - 1$, où $n_i(A)$ est le nombre de noeuds internes dans A, et $n_f(A)$ est le nombre de feuilles dans A. *Rappel : un noeud* interne *est un noeud de l'arbre qui possède au moins* 1 *fils.*

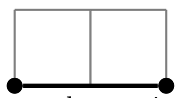
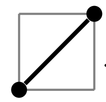
Question 3. Donner un arbre binaire A pour lequel $n_i(A) = n_f(A) - 1$.

Question 4. Donner un arbre binaire A pour lequel $n_i(A) > n_f(A) - 1$.

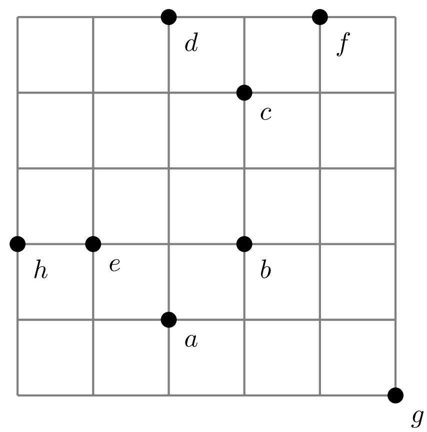
Question 5. Donner un arbre binaire A ayant seulement 2 feuilles et 15 noeuds internes. Peut-on rendre l'écart entre le nombre de feuilles et le nombre de noeuds internes aussi grand que l'on veut ?

Exercice 4. (3 points)

Soit G le graphe **complet** (même si les arêtes ne sont pas dessinées) dont les 8 sommets correspondent aux 8 points dans le diagramme ci-dessous, tel que le poids de chaque arête est la distance euclidienne entre les deux sommets. Le côté de chaque petit carré est de longueur 1.

Par exemple, voici deux points à distance 2 :  ; et voici deux points à distance $\sqrt{2}$:  . On remarque que la plus petite distance possible entre deux points est 1, et la deuxième plus petite distance possible est $\sqrt{2}$.

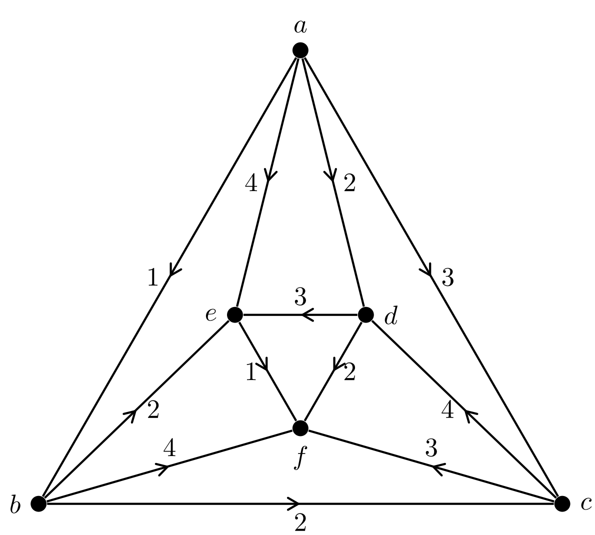
Question 1. Trouver un arbre couvrant de poids minimum de G. Vous pouvez tracer l'arbre directement dans le diagramme. Écrire sur la copie les arêtes dans l'ordre où ils sont traitées.



Indication : $\sqrt{2} \approx 1{,}41$; $\sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Exercice 5. (2 points)

Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la distance du sommet a aux autres sommets dans le graphe suivant. Écrire sur la copie les sommets dans l'ordre où ils sont traités.



Exercice 6. (3 points) Demosthenes, un fameux mathématicien grecque, a eu trois étudiants. Dix de ses descendants académiques ont eu trois étudiants chacun, quinze ont eu deux étudiants, et tous les autres descendants académiques sont morts sans avoir eu d'étudiant. Combien de descendants Demosthenes a-t-il eu ? *Note : Les « descendants académiques » de Demosthenes sont ses étudiants, les étudiants de ses étudiants, etc.*

Exercice 7. (3 points)

Dans un jeu de $52 = 13 \times 4$ cartes, chaque carte a une valeur (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R) et une couleur ($\spadesuit$,$\diamondsuit$,$\heartsuit$,$\clubsuit$).

Question 1. Quelle est la longueur maximale d'une suite de cartes qu'on peut construire à partir d'un jeu de 52 cartes de façon à ce que deux cartes consécutives soient de la même valeur ou de la même couleur, mais si on prend trois cartes consécutives quelconques, elles n'ont pas toutes trois la même valeur ni la même couleur ? Par exemple, $A\spadesuit$,$7\spadesuit$,$7\heartsuit$,$D\heartsuit$ est une suite qui respecte cette règle.

Indication : représentez le jeu de 52 cartes par un graphe dont les sommets sont A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, $\spadesuit$,$\diamondsuit$,$\heartsuit$,$\clubsuit$ et dont les arêtes sont les cartes. Réfléchissez aux degrés des sommets dans ce graphe.