Contrôle continu — INF303 26 octobre 2016

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

— *Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.*
— *Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.*
— *Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.*
— *Les appareils électroniques sont interdits.*
— *Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.*
— *Le document fait deux pages.*

Exercice 1. (2 points)

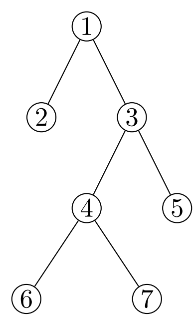
Un anagramme d'un mot M est un mot (qui peut ne pas avoir de sens) qui a les même lettres que M, chacune apparaîssant le même nombre de fois que dans M.

Question 1. Combien le mot RESSASSER a-t-il d'anagrammes ? (Donnez une expression utilisant des factorielles.)

> $\frac{9!}{4!2!2!} = 3780$.

Exercice 2. (2 points)

Voici l'arbre A :



Écrire l'ordre des sommets de A selon le parcours en :

1. profondeur préfixé ;
2. profondeur infixé ;
3. profondeur postfixé ;
4. largeur.

> 1. préfixé : 1,2,3,4,6,7,5
> 2. infixé : 2,1,6,4,7,3,5
> 3. postfixé : 2,6,7,4,5,3,1
> 4. largeur : 1,2,3,4,5,6,7

Exercice 3. (5 points)

Dans cet exercice, on considère des arbres « d'informaticien » binaires, comme vu en TP. On a donc une racine en haut, des feuilles en bas, et chaque noeud peut avoir 0, 1 ou 2 fils.

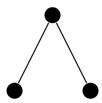
Question 1. Prouver par récurrence sur n qu'un arbre binaire complet de profondeur n possède 2^n feuilles.

> Soit $P(n)$ la proposition « un arbre binaire complet de profondeur n possède 2^n feuilles ». Le cas de base est $n = 1$. Il est facile à vérifier qu'un arbre binaire complet de profondeur 1 possède $2 = 2^1$ feuilles, donc $P(1)$ est vrai.
> Supposons que $P(n)$ est vrai pour un entier $n \geq 1$. Soit A un arbre binaire complet de profondeur $n + 1$. Soient v_1 et v_2 les deux enfants de la racine de A, et soient A_1 et A_2 les deux sous-arbres de A enracinés en v_1 et v_2, respectivement. A_1 et A_2 sont des arbres binaires complets de profondeur n, donc ils ont 2^n feuilles chacun par l'hypothèse de récurrence. On conclut que A possède $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ feuilles, donc $P(n + 1)$ est vrai.
> La proposition $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geq 1$ par récurrence.

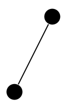
Question 2. Prouver par récurrence sur n que tout arbre binaire A de profondeur n vérifie la relation suivante : $n_i(A) \geq n_f(A) - 1$, où $n_i(A)$ est le nombre de noeuds internes dans A, et $n_f(A)$ est le nombre de feuilles dans A.
Rappel : un noeud interne *est un noeud de l'arbre qui possède au moins* 1 *fils.*

> Soit $Q(n)$ la proposition « un arbre binaire complet A de profondeur n vérifie la relation $n_i(A) \geq n_f(A) - 1$ ». Le cas de base est $n = 1$. Soit A un arbre binaire complet de profondeur 1. On a $n_f(A) = 2$ et $n_i(A) = 1$, donc $n_i(A) \geq n_f(A) - 1$ et $Q(1)$ est vrai.
> Supposons que $Q(n)$ est vrai pour un entier $n \geq 1$. Soit A un arbre binaire complet de profondeur $n+1$. Soient v_1 et v_2 les deux enfants de la racine de A, et soient A_1 et A_2 les deux sous-arbres de A enracinés en v_1 et v_2, respectivement. A_1 et A_2 sont des arbres binaires complets de profondeur n, donc $n_i(A_1) \geq n_f(A_1) - 1$ et $n_i(A_2) \geq n_f(A_2) - 1$ par l'hypothèse de récurrence. On a $n_i(A) = n_i(A_1) + n_i(A_2) + 1$ et $n_f(A) = n_f(A_1) + n_f(A_2)$, donc $n_i(A) \geq (n_f(A_1) - 1) + (n_f(A_2) - 1) - 1 = n_f(A) - 1$ et $Q(n+1)$ est vrai.
> La proposition $Q(n)$ est vrai pour tout entier $n \geq 1$ par récurrence.

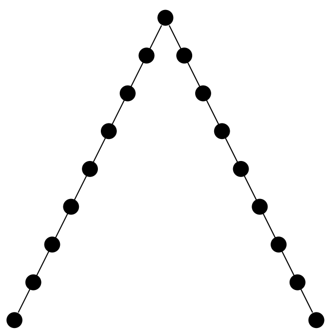
Question 3. Donner un arbre binaire A pour lequel $n_i(A) = n_f(A) - 1$.



Question 4. Donner un arbre binaire A pour lequel $n_i(A) > n_f(A) - 1$.



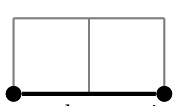
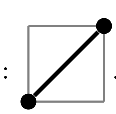
Question 5. Donner un arbre binaire A ayant seulement 2 feuilles et 15 noeuds internes. Peut-on rendre l'écart entre le nombre de feuilles et le nombre de noeuds internes aussi grand que l'on veut ?



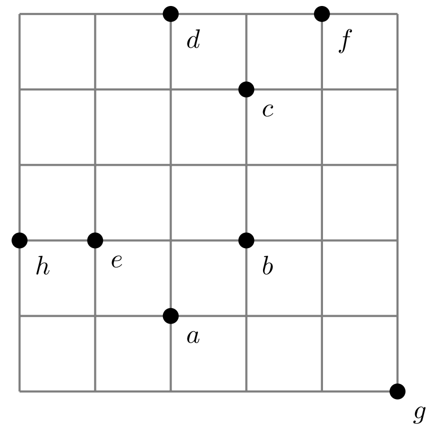
> L'écart peut être aussi grand que l'on veut

Exercice 4. (3 points)

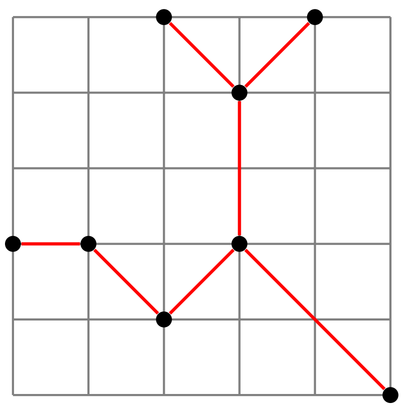
Soit G le graphe **complet** (même si les arêtes ne sont pas dessinées) dont les 8 sommets correspondent aux 8 points dans le diagramme ci-dessous, tel que le poids de chaque arête est la distance euclidienne entre les deux sommets. Le côté de chaque petit carré est de longueur 1.

Par exemple, voici deux points à distance 2 :  ; et voici deux points à distance $\sqrt{2}$: . On remarque que la plus petite distance possible entre deux points est 1, et la deuxième plus petite distance possible est $\sqrt{2}$.

Question 1. Trouver un arbre couvrant de poids minimum de G. Vous pouvez tracer l'arbre directement dans le diagramme. Écrire sur la copie les arêtes dans l'ordre où ils sont traitées.



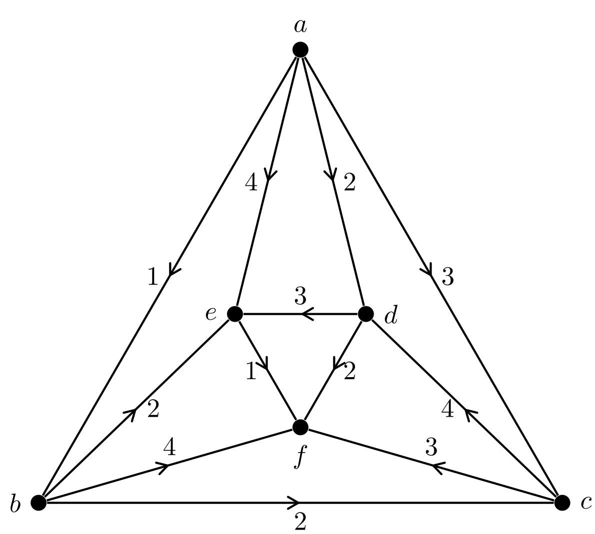
Indication : $\sqrt{2} \approx 1{,}41$; $\sqrt{10} \approx 3{,}16$.



Ordre sur les arêtes (pas unique) : eh,ae,ab,cd,cf,bc,bg.

Exercice 5. **(2 points)**

Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la distance du sommet a aux autres sommets dans le graphe suivant. Écrire sur la copie les sommets dans l'ordre où ils sont traités.



v	a	b	c	d	e	f
dist(a,v)	0	1	3	2	3	4

Les sommets sont traités (marqués) dans l'ordre soit a,b,d,c,e,f, soit a,b,d,e,c,f.

Exercice 6. **(3 points)** Demosthenes, un fameux mathématicien grecque, a eu trois étudiants. Dix de ses descendants académiques ont eu trois étudiants chacun, quinze ont eu deux étudiants, et tous les autres descendants académiques sont morts sans avoir eu d'étudiant. Combien de descendants Demosthenes a-t-il eu ? *Note : Les « descendants académiques » de Demosthenes sont ses étudiants, les étudiants de ses étudiants, etc.*

> Soit $n-1$ le nombre de descendants académiques de Demosthenes. Considérer l'arbre généalogique T. T a n sommets (Demosthenes et les $n-1$ descendants académiques), dont 10 sommets de degré 4, 16 sommets de degré 3 (Demosthenes et les 15 descendants académiques avec deux étudiants chacun) et les autres $n-(11+15)=n-26$ sommets de degré 1. Soit m le nombre d'arêtes de T. On a $2n-2=2m=\sum_{v\in V(T)} d(v)=10\cdot 4+16\cdot 3+n-26=n+62$, donc $n=64$. On conclut que Demosthenes a eu 63 descendants académiques.

Exercice 7. **(3 points)**

Dans un jeu de $52=13\times 4$ cartes, chaque carte a une valeur (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R) et une couleur ($\spadesuit$,$\diamondsuit$,$\heartsuit$,$\clubsuit$).

Question 1. Quelle est la longueur maximale d'une suite de cartes qu'on peut construire à partir d'un jeu de 52 cartes de façon à ce que deux cartes consécutives soient de la même valeur ou de la même couleur, mais si on prend trois cartes consécutives quelconques, elles n'ont pas toutes trois la même valeur ni la même couleur ? Par exemple, $A\spadesuit$,7$\spadesuit$,7$\heartsuit$,$D\heartsuit$ est une suite qui respecte cette règle.

Indication : représentez le jeu de 52 cartes par un graphe dont les sommets sont A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, $\spadesuit$,$\diamondsuit$,$\heartsuit$,$\clubsuit$ et dont les arêtes sont les cartes. Réfléchissez aux degrés des sommets dans ce graphe.

> On représente le jeu de 52 cartes par un graphe dont les sommets sont A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R, $\spadesuit$,$\diamondsuit$,$\heartsuit$,$\clubsuit$ et dont les arêtes sont les cartes. Le graphe contient 4 sommets de degré impair ($\spadesuit$,$\diamondsuit$,$\heartsuit$,$\clubsuit$). Si l'on supprime deux arêtes incidentes à A, par exemple, cela va nous donner un graphe avec deux sommets de degré impair, donc il existe une chaîne eulérienne dans ce graphe avec 50 arêtes. C'est-à-dire, il existe une suite de longueur 50. Si on supprime au plus une arête, le graphe aura toujours 4 sommets de degré impair, donc pas de chaîne eulérienne. Donc, le mieux qu'on peut faire est 50.