Contrôle continu — INF233 novembre 2015

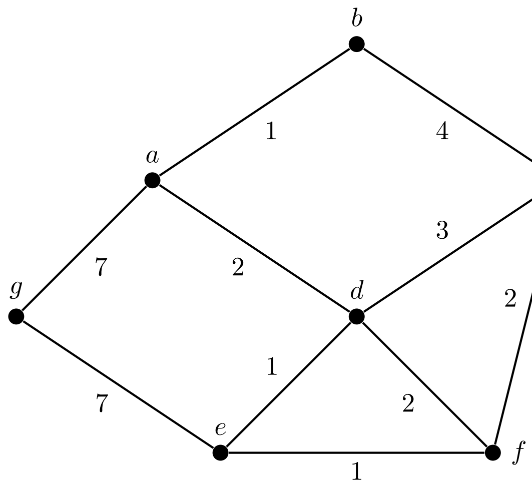
**À lire attentivement avant de commencer le sujet :**

— *Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.*
— *Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.*
— *Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.*
— *Les appareils électroniques sont interdits.*
— *Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.*
— *Le document fait deux pages.*

---

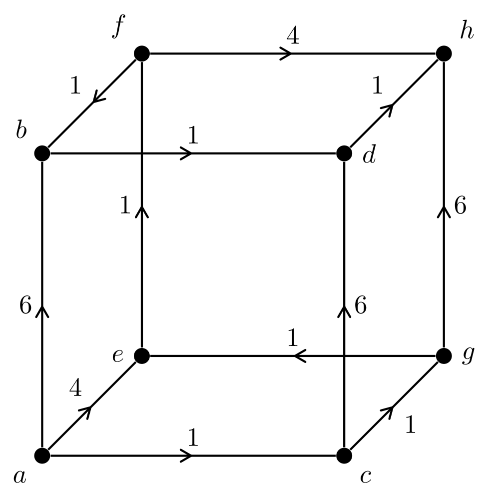
**Exercice 1. (2 points)**

Trouver un arbre couvrant de poids minimum du graphe ci-dessous en utilisant l'algorithme de Kruskal. Écrire sur la copie les arêtes dans l'ordre où elles sont choisies.




**Exercice 2. (2 points)**

Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la distance du sommet $a$ aux autres sommets dans le graphe suivant.



**Exercice 3. (2 points)**

Soit $G$ un graphe à 10 sommets avec 8 sommets de degré 6 et 2 sommets de degré 3. Combien $G$ a t-il d'arêtes ?

**Exercice 4. (3 points)**

Soit $G$ un graphe à $n$ sommets.

*Question 1.* Quel est le degré maximum possible d'un sommet de $G$ ? Le degré minimum ?

*Question 2.* Déduire que $G$ contient deux sommets de même degré.

**Exercice 5. (3 points)**

Il y a 3 façons de répartir 4 macarons identiques entre Anne, Bertrand et Céline si on doit donner au moins un macaron à chacun :

1. Anne reçoit 2 macarons, Bertrand reçoit 1 macaron et Céline reçoit 1 macaron ;
2. Anne reçoit 1 macaron, Bertrand reçoit 2 macarons et Céline reçoit 1 macaron ;
3. Anne reçoit 1 macaron, Bertrand reçoit 1 macaron et Céline reçoit 2 macarons.

On peut noter ces répartitions comme $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ et $(1, 1, 2)$, respectivement.

*Question 1.* Supposons qu'on dispose de 5 macarons identiques. De combien de façons peut-on les répartir entre Anne, Bertrand et Céline si on doit donner au moins un macaron à chacun ?

*Question 2.* Supposons maintenant qu'on dispose de $n$ macarons identiques qu'on veut répartir entre $k$ personnes (toujours avec la condition qu'on doit donner au moins un macaron à chacun ; en particulier on suppose que $n \geq k$). De combien de façons peut-on le faire ?

*(Indication : chaque répartition correspond à une expression de la forme* $(1\square 1\square \cdots \square 1)$*, où on doit remplacer les* $n-1$ *« $\square$ » par* $k-1$ *« , » et* $n-k$ *« + ».)*

**Exercice 6. (4 points)**

Une grenouille veut parcourir $n + 1$ nénuphars numérotés de 0 à $n$. Depuis le nénuphar $k$, la grenouille peut sauter soit sur le nénuphar $k + 1$, soit sur le nénuphar $k + 2$. Pour $0 \leq k \leq n$, on note $a_k$ le nombre de façons de se rendre du nénuphar 0 au nénuphar $k$. On a donc en particulier $a_0 = a_1 = 1$.

*Question 1.* Montrer que $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ pour $0 \leq k \leq n - 2$.

*Question 2.* Montrer par récurrence que $\left(\frac{3}{2}\right)^k \leq a_{k+1} \leq 2^k$. On pourra admettre le résultat de la question précédente.

**Exercice 7. (4 points)**

On considère le graphe $G$ dont les sommets sont les sous ensembles de $\{1, 2, 3\}$ et où il y a une arête entre les sommets $u$ et $v$ si les ensembles correspondant ont exactement un élément en commun.

*Question 1.* Dessiner $G$ puis sa matrice d'adjacence et sa matrice d'incidence.

*Question 2.* $G$ est-il connexe ?