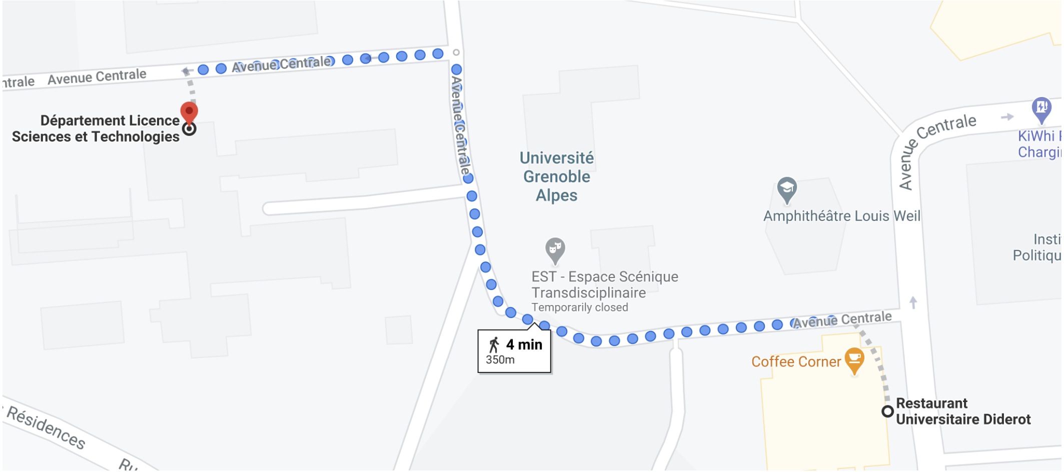
Plus court chemin

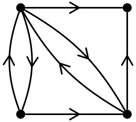


Rappel : graphes orientés

Pour le problème du plus court chemin, il est pratique de considérer les graphes orientés pondérés.

Le cadre du problème

- Un graphe orienté est un couple $G = (V, E)$ formé par un ensemble fini V et un sous-ensemble E de V^2.
- À chaque arc e de G, on peut associer un poids $w_e \in \mathbb{R}$.
- On représente les arcs par des flèches.
- Si $(u, v) \in E$, alors on met une flèche de u vers v.

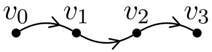


Chemins (chaînes orientées)

Définition

Un chemin dans un graphe orienté $G = (V, E)$ est une suite de la forme $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ où

- $v_i \in V$
- $e_i \in E$
- $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$ pour $i = 0, \dots, k - 1$.



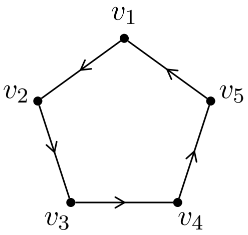
- L'entier k est la longueur du chemin.

Circuits (cycles orientées)

Définition

Un circuit dans un graphe orienté $G = (V, E)$ est une suite de la forme $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_0)$ où

- $v_i \in V$
- $e_i \in E$
- $e_{i+1} = (v_i, v_{i+1})$ pour $i = 0, \ldots, k-1$.

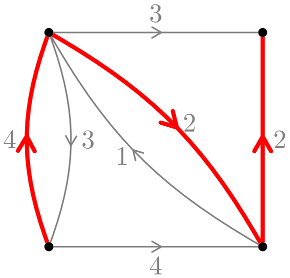


- L'entier k est la longueur du chemin.

Chemins et circuits pondérés

Définition

- Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté pondéré (avec pondération $w \in \mathbb{R}^{|E|}$).
- Soit $P \subseteq$ un chemin dans G.
- La <u>longueur</u> (ou poids) du chemin P est définie comme $\sum_{e \in E(P)} w_e$.

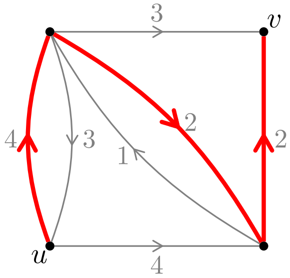


Distance

Définition

Soient u, v deux sommets dans un graphe orienté pondéré $G = (V, E)$ (avec pondération $w \in \mathbb{R}^{|E|}$). La distance de u à v est définie comme

$$\mathrm{dist}(u, v) = \min\{w(P) : P \text{ est un chemin de } u \text{ à } v\}$$



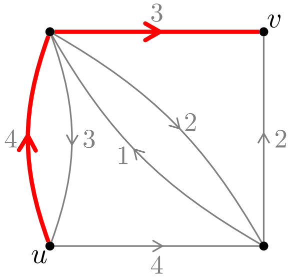
$\mathrm{dist}(u, v) \leq 8$

Distance

Définition

Soient u, v deux sommets dans un graphe orienté pondéré $G = (V, E)$ (avec pondération $w \in \mathbb{R}^{|E|}$). La distance de u à v est définie comme

$$\mathrm{dist}(u, v) = \min\{w(P) : P \text{ est un chemin de } u \text{ à } v\}$$



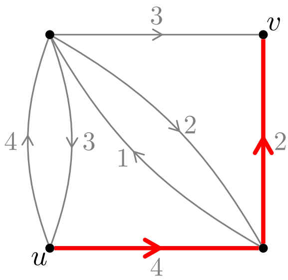
$\mathrm{dist}(u, v) \leq 7$

Distance

Définition

Soient u, v deux sommets dans un graphe orienté pondéré $G = (V, E)$ (avec pondération $w \in \mathbb{R}^{|E|}$). La <u>distance</u> de u à v est définie comme

$$\mathrm{dist}(u, v) = \min\{w(P) : P \text{ est un chemin de } u \text{ à } v\}$$



$\mathrm{dist}(u, v) = 6$

Le problème du plus court chemin

Problème

Étant donné un graphe orienté $G = (V, E)$ pondéré (avec pondération $w \in \mathbb{R}^{|E|}$) et deux sommets $u \neq v$ dans V, trouver un plus court chemin (« chaîne orientée ») de u vers v.

Remarque

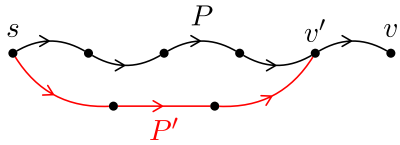
Il peut ne pas exister de plus court chemin de u à v :

- S'il n'y a aucun chemin de u à v : $\mathrm{dist}(u, v) = \infty$
- S'il y a un circuit de poids négatif (circuit absorbant) : $\mathrm{dist}(u, v) = -\infty$

Principe de sous-optimalité

Observation

Si P est un plus court chemin de s vers v alors, en notant v' le prédécesseur de v dans ce chemin, le sous-chemin de P qui va de s vers v' est un plus court chemin de s vers v'.



Démonstration par l'absurde

S'il existe P' de s vers v' de poids strictement inférieur au sous-chemin de P de s vers v' alors en concaténant P' à (v, v') on aurait un chemin de s à v' de poids strictement inférieur à celui de P, contradiction.

Illustration de l'algorithme de Dijkstra

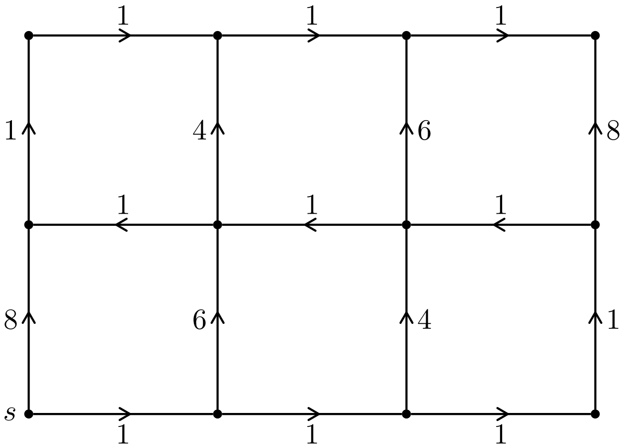


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

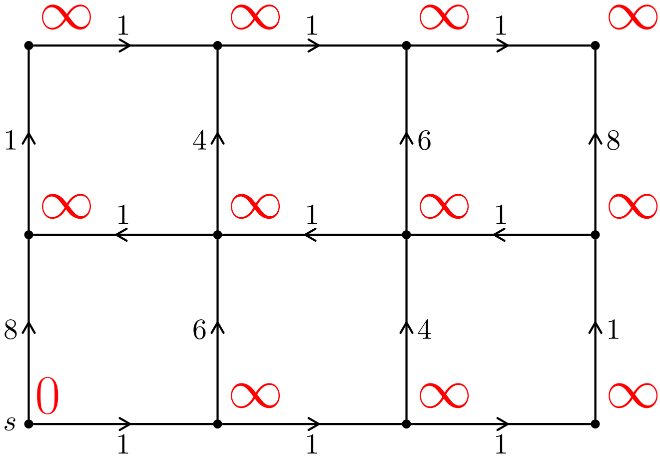


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

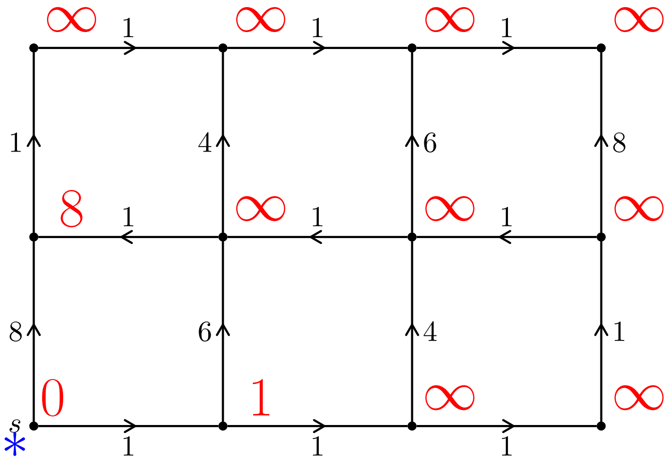


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

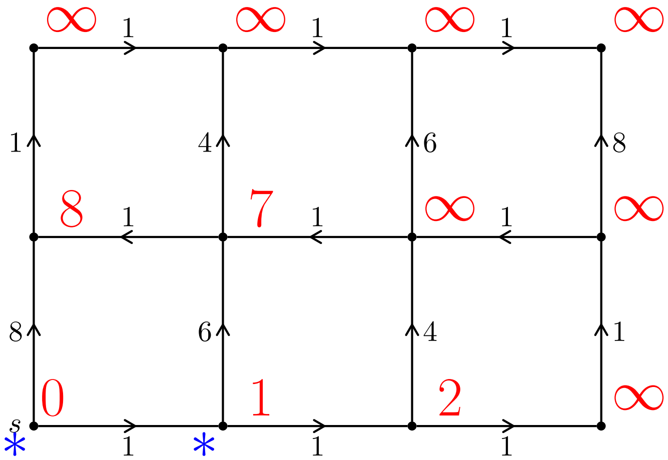


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

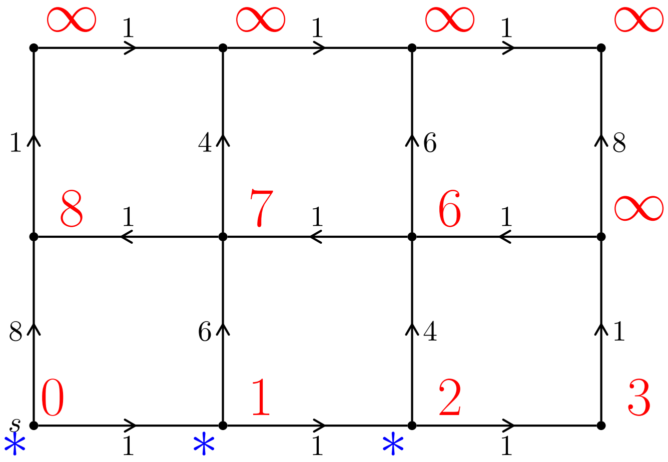


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

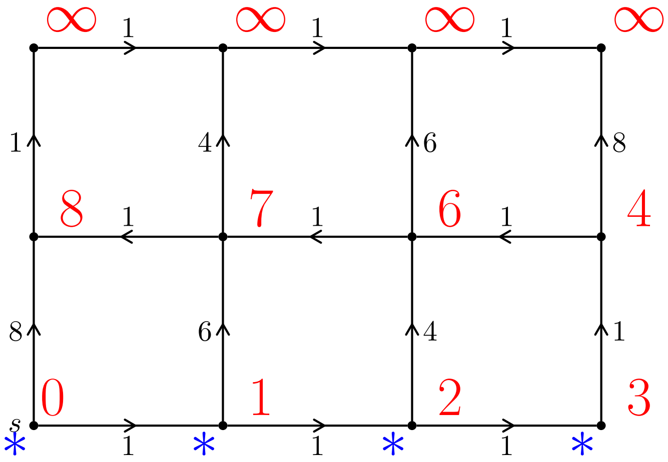


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

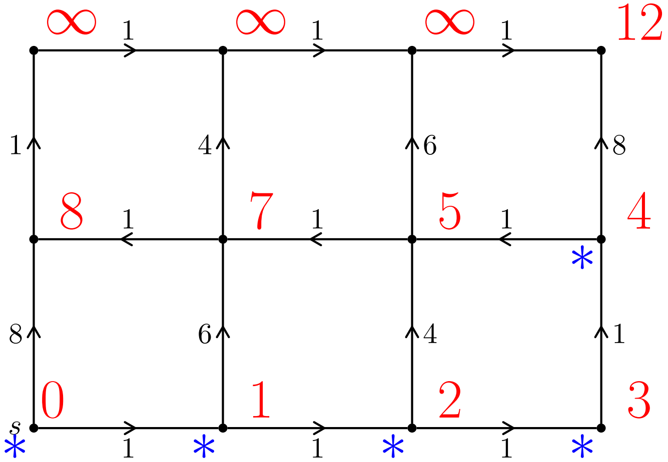


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

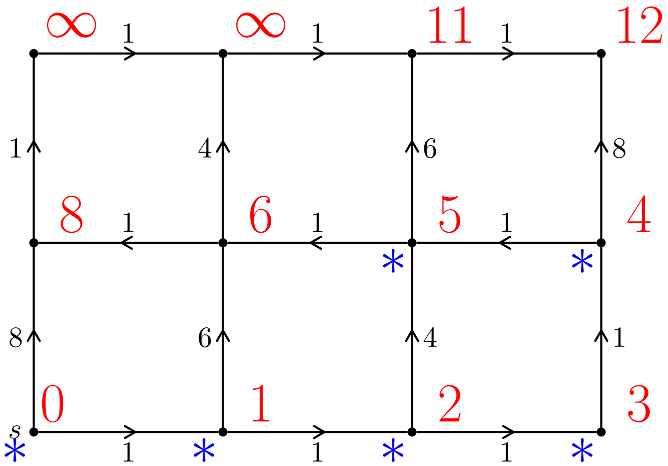


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

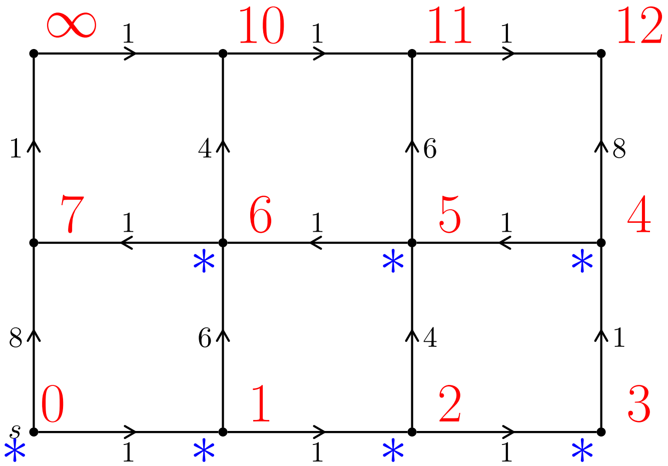


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

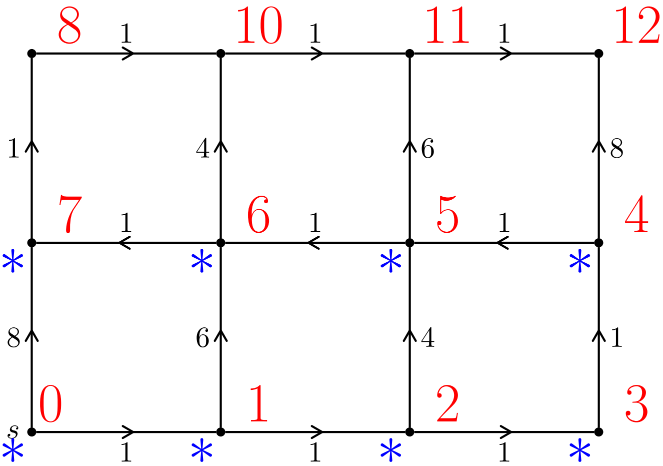


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

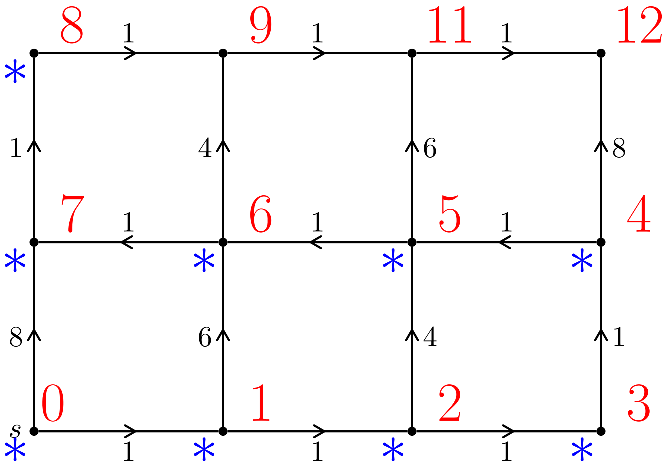


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

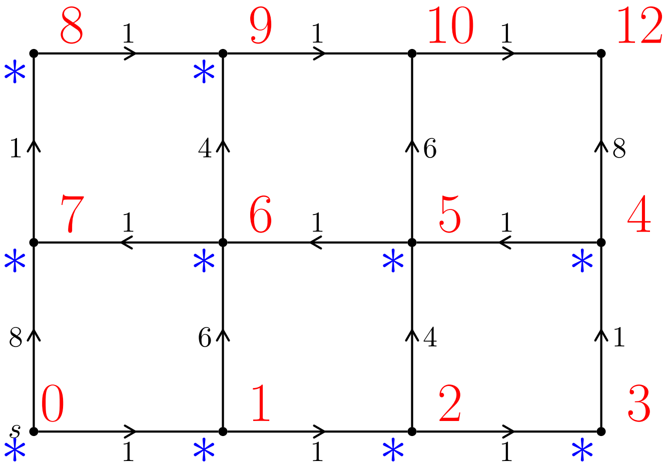


Illustration de l'algorithme de Dijkstra

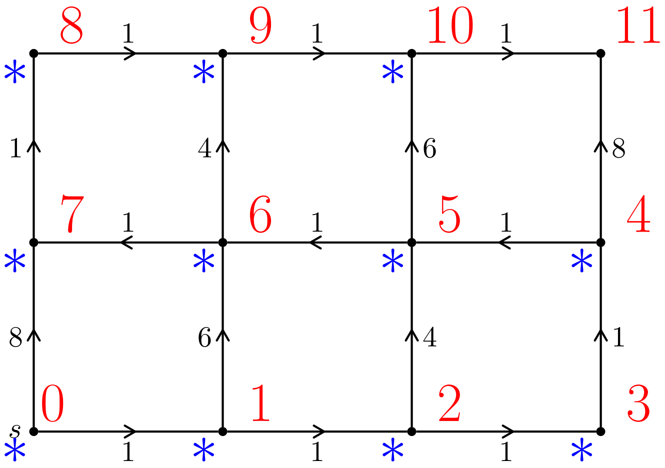
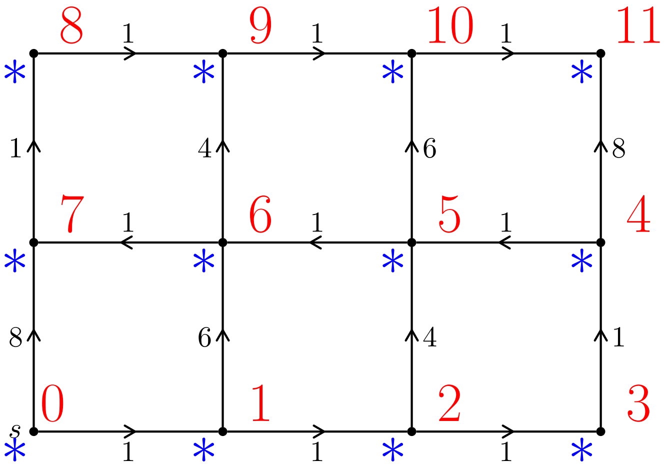


Illustration de l'algorithme de Dijkstra



Algorithme de Dijkstra

Entrées : Un graphe orienté connexe $G = (V, E)$ avec pondération $w \geq 0$ et un sommet $s \in V$

Sorties : Distances de s aux autres sommets

```
// Variable locales
```

Sous-ensemble S de V

Tableau D

```
// Initialisation
```

$S := \emptyset$;

$D[s] := 0$;

pour tous les $\underline{x \neq s}$ **faire**

  $D[x] := +\infty$;

```
// Partie principale
```

tant que $\underline{S \neq V}$ **faire**

  Trouver $x \notin S$ tel que $D[x]$ est minimum;

  pour tous les $\underline{y \notin S \text{ tel que } (x, y) \in E}$ **faire**

    $D[y] := \min(D[y], D[x] + w(x, y))$;

  $S := S \cup \{x\}$

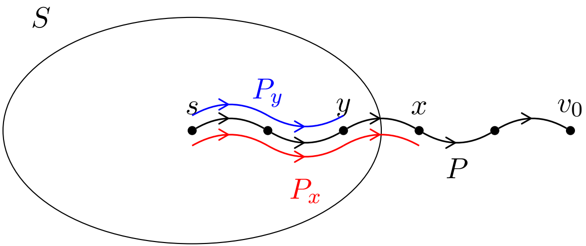
retourner $\underline{D}$;

Distances partielles

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté avec pondération $w \geq 0$, et $s \in S \subseteq V$. Pour tout $u \in V$, on note $d(u) = \mathrm{dist}(s, u)$. Pour tout sommet $v \notin S$, on définit

$$D(v) = \min \{d(u) + w(u, v) \colon u \in S \text{ et } (u, v) \in E\} .$$



Justification de l'algorithme de Dijkstra (1/3)

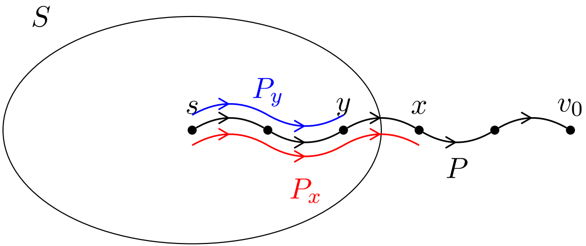
Lemme

Soit v_0 tel que $D(v_0)$ est minimum, parmi tous les sommets dans $V \setminus S$. Alors, $D(v_0) = d(v_0)$.

Démonstration

- Soit v_0 tel que $D(v_0)$ est minimum.
- Comme $D(v_0)$ est la longueur d'un chemin de s à v_0, on a $D(v_0) \geq d(v_0)$.
- Si $D(v_0) \leq d(v_0)$ alors la preuve est terminé.
- Sinon, on suppose $D(v_0) > d(v_0)$.
- Soit P un plus court chemin de s vers v_0 (son poids est alors $d(v_0)$).
- Soit x le premier sommet de P qui n'appartient pas à S.

Justification de l'algorithme de Dijkstra (2/3)



Démonstration (suite)

- Soit $y \in S$ le prédécesseur de x dans ce chemin.
- Soit P' le sous-chemin de P_y de s vers y.
- P_y est un plus court chemin de s vers y (principe de sous optimalité).
- Soit P_x le sous chemin de P de s vers x.

Justification de l'algorithme de Dijkstra (3/3)

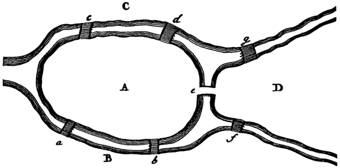
Démonstration (suite)

- La longueur de P_x est $d(y) + w(y, x)$.
- Ceci entraîne que $D(x) \leq d(y) + w(y, x) \leq d(v_0) < D(v_0)$.
  - Première inégalité : par définition de D.
  - Deuxième inégalité : tous les poids sont ≥ 0.
  - Troisième inégalité : par hypothèse.
- Implique $D(x) < D(v_0)$ — contradiction avec la minimalité de $D(v_0)$.

Les sept ponts de Königsberg

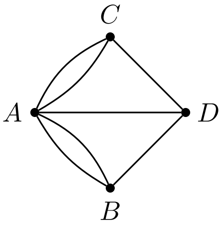
Problème

Existe-t-il une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ ?



Une reformulation

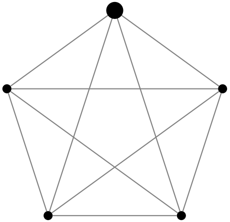
Existe-t-il un cycle dans le graphe à droite qui traverse chaque arête exactement une fois ?



Graphes eulériens

Définition

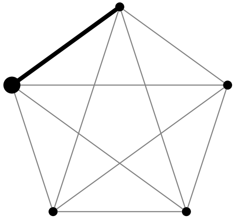
- Un cycle C dans un graphe G est eulérien si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



Graphes eulériens

Définition

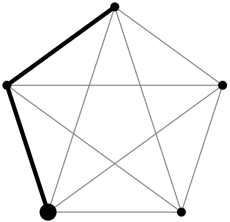
- Un cycle C dans un graphe G est eulérien si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



Graphes eulériens

Définition

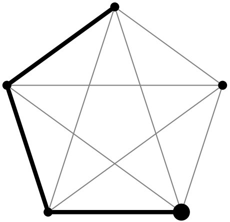
- Un cycle C dans un graphe G est <u>eulérien</u> si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé <u>graphe eulérien</u>.



Graphes eulériens

Définition

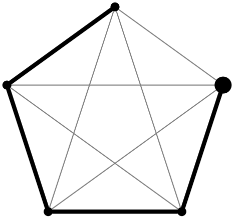
- Un cycle C dans un graphe G est eulérien si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



Graphes eulériens

Définition

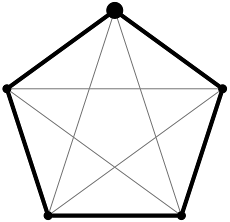
- Un cycle C dans un graphe G est <u>eulérien</u> si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé <u>graphe eulérien</u>.



Graphes eulériens

Définition

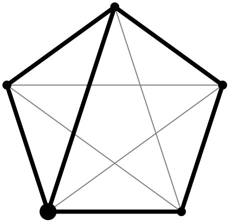
- Un cycle C dans un graphe G est eulérien si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



Graphes eulériens

Définition

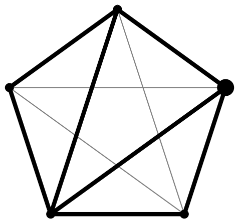
- Un cycle C dans un graphe G est eulérien si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



Graphes eulériens

Définition

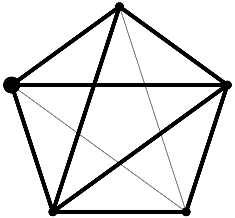
- Un cycle C dans un graphe G est eulérien si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



Graphes eulériens

Définition

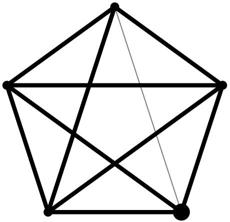
- Un cycle C dans un graphe G est eulérien si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



Graphes eulériens

Définition

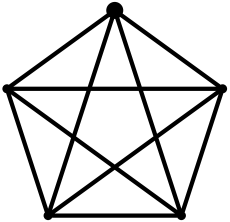
- Un cycle C dans un graphe G est eulérien si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé graphe eulérien.



Graphes eulériens

Définition

- Un cycle C dans un graphe G est <u>eulérien</u> si C traverse chaque arête de G une et une seule fois.
- Un graphe avec un cycle eulérien est appelé <u>graphe eulérien</u>.



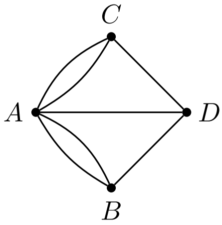
Caractérisation des graphes eulériens

Théorème (Euler 1736)

Un graphe G est eulérien si et seulement si G est connexe, et tout sommet de G est de degré pair.

Remarques

- Euler a prouvé eulérien $\implies$ connexe et tous les degrés pairs
- Il a ainsi donné une réponse négative au problème des sept ponts.



Démonstration du théorème d'Euler

- ($\Longrightarrow$)
- Soit G un graphe eulérien avec un cycle eulérien C avec sommet initial et terminal u.
- Chaque fois que C passe par un sommet $v \neq u$, on comptabilise deux arêtes incidentes à v.
- Donc, le degré de v est pair.
- De même, $d(u)$ est pair puisque C débute et termine en u.
- ($\Longleftarrow$)
- Par récurrence forte sur le nombre d'arêtes m.
- Soit $A(m)$ l'assertion « tout graphe connexe avec m arêtes, dont tous les sommets sont de degré pair, est eulérien »
- Cas de base : $A(0)$ est vraie.

- Supposons que $A(0), A(1), \ldots, A(m)$ sont vraies (hypothèse de récurrence).
- Soit G un graphe connexe, avec tous les sommets de degré pair, avec $m+1$ arêtes.
- Soit C un cycle dans G (C existe car tous les degrés de G sont pairs).
- Soient $G_1, G_2, \ldots, G_k$ les composantes connexes de $G' = G - E(C)$ (le graphe obtenu de G en supprimant toutes les arêtes de C).
- Chaque G_i est connexe, n'a que des sommets de degré pair, et a au plus m arêtes.
- Par l'hypothèse de récurrence, $G_1, \ldots, G_k$ sont eulériens.

- On peut construire un cycle eulérien de G comme suit :
- Commencer par un sommet v_1 de C.
- S'il y a une composante connexe G_i qui contient v_1, suivre un cycle eulérien de G_i et retourner à v_1.
- Passer au sommet v_2 de C.
- S'il y a une composante connexe G_j qui contient v_1, suivre un cycle eulérien de G_j et retourner à v_1.
- Continuer jusqu'à retourner au sommet v_1 de C.
- On a ainsi construit un cycle eulérien.

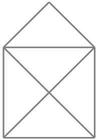
Chaînes eulériennes

Définition

Soit G un graphe et u, v deux sommets distincts de G. Une chaîne de u à v qui traverse chaque arête de G une et une seule fois est une chaîne eulérienne.

Théorème

Un graphe G contient une chaîne eulérienne de u à v ssi G est connexe et le degré de tous les sommets sauf u et v est pair.



Application

Les problèmes du type « dessiner sans lever le crayon ».

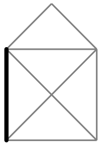
Chaînes eulériennes

Définition

Soit G un graphe et u, v deux sommets distincts de G. Une chaîne de u à v qui traverse chaque arête de G une et une seule fois est une chaîne eulérienne.

Théorème

Un graphe G contient une chaîne eulérienne de u à v ssi G est connexe et le degré de tous les sommets sauf u et v est pair.



Application

Les problèmes du type « dessiner sans lever le crayon ».

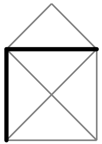
Chaînes eulériennes

Définition

Soit G un graphe et u, v deux sommets distincts de G. Une chaîne de u à v qui traverse chaque arête de G une et une seule fois est une chaîne eulérienne.

Théorème

Un graphe G contient une chaîne eulérienne de u à v ssi G est connexe et le degré de tous les sommets sauf u et v est pair.



Application

Les problèmes du type « dessiner sans lever le crayon ».

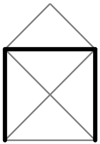
Chaînes eulériennes

Définition

Soit G un graphe et u, v deux sommets distincts de G. Une chaîne de u à v qui traverse chaque arête de G une et une seule fois est une chaîne eulérienne.

Théorème

Un graphe G contient une chaîne eulérienne de u à v ssi G est connexe et le degré de tous les sommets sauf u et v est pair.



Application

Les problèmes du type « dessiner sans lever le crayon ».

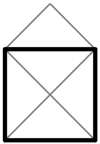
Chaînes eulériennes

Définition

Soit G un graphe et u, v deux sommets distincts de G. Une chaîne de u à v qui traverse chaque arête de G une et une seule fois est une chaîne eulérienne.

Théorème

Un graphe G contient une chaîne eulérienne de u à v ssi G est connexe et le degré de tous les sommets sauf u et v est pair.



Application

Les problèmes du type « dessiner sans lever le crayon ».

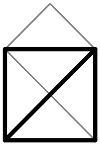
Chaînes eulériennes

Définition

Soit G un graphe et u, v deux sommets distincts de G. Une chaîne de u à v qui traverse chaque arête de G une et une seule fois est une chaîne eulérienne.

Théorème

Un graphe G contient une chaîne eulérienne de u à v ssi G est connexe et le degré de tous les sommets sauf u et v est pair.



Application

Les problèmes du type « dessiner sans lever le crayon ».

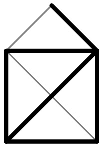
Chaînes eulériennes

Définition

Soit G un graphe et u, v deux sommets distincts de G. Une chaîne de u à v qui traverse chaque arête de G une et une seule fois est une chaîne eulérienne.

Théorème

Un graphe G contient une chaîne eulérienne de u à v ssi G est connexe et le degré de tous les sommets sauf u et v est pair.



Application

Les problèmes du type « dessiner sans lever le crayon ».

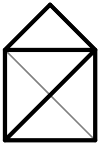
Chaînes eulériennes

Définition

Soit G un graphe et u, v deux sommets distincts de G. Une chaîne de u à v qui traverse chaque arête de G une et une seule fois est une chaîne <u>eulérienne</u>.

Théorème

Un graphe G contient une chaîne eulérienne de u à v ssi G est connexe et le degré de tous les sommets sauf u et v est pair.



Application

Les problèmes du type « dessiner sans lever le crayon ».

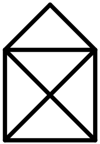
Chaînes eulériennes

Définition

Soit G un graphe et u, v deux sommets distincts de G. Une chaîne de u à v qui traverse chaque arête de G une et une seule fois est une chaîne <u>eulérienne</u>.

Théorème

Un graphe G contient une chaîne eulérienne de u à v ssi G est connexe et le degré de tous les sommets sauf u et v est pair.



Application

Les problèmes du type « dessiner sans lever le crayon ».

Démonstration

Démonstration

- ($\Longrightarrow$)
- Même argument que pour les cycles eulériens.
- ($\Longleftarrow$)
- Si l'on ajoute l'arête uv à G, on obtient un graphe connexe avec tous les sommets de degré pair.
- Par le théorème d'Euler, il existe un cycle eulérien C dans $G + uv$.
- Si l'on supprime l'arête uv de C, on obtient une chaîne eulérienne de u à v.