

Chapitre 1

Parcours et coupes[†]

1.1. Introduction et notations

Peut-on parcourir les rues d'une ville en passant par chacune d'elles une fois et une seule ? Un voyageur de commerce ayant à visiter cinquante villes peut-il facilement optimiser la longueur de son trajet ? Y a-t-il une méthode simple permettant de trouver le trajet le plus court d'un postier devant parcourir toutes les rues de sa ville au moins une fois ? Comment minimiser le nombre de trous pour réaliser un circuit électrique sur une plaque dont on peut utiliser les deux faces ?

Voilà quelques-unes des questions classiques de l'*optimisation combinatoire* que nous rencontrerons dans ce chapitre. Les trois premières relèvent de l'étude des *parcours* de graphes - plus précisément l'étude des *chaînes* et des *cycles* -, la dernière relève de celle des *coupes* dans les graphes. Nous aborderons également les *multiflots*, qui sont une généralisation des flots vus au chapitre 5 du volume 1. Les parcours, les multiflots et les coupes sont des sujets très liés, et, en plus d'être des outils de base de l'optimisation combinatoire, ils apparaissent dans de nombreuses applications concrètes. Mais notre ambition va au-delà de la présentation de ces outils : nous souhaitons également exposer quelques démarches typiques de la discipline.

Un des outils dont nous nous servons pour appréhender les problèmes est la *complexité* (voir chapitre 2 du volume 1). C'est une idée qui s'est développée au cours des années 60, et qui permet d'identifier des différences de nature entre des problèmes. Informellement, résoudre la complexité d'un problème comme ceux posés ci-dessus, c'est répondre à la question : existe-t-

[†]Chapitre rédigé par Frédéric Meunier, *LVMT, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Marne-la-Vallée*, et András Sebő, *CNRS, Laboratoire G-SCOP, Grenoble* (le travail de cet auteur a été partiellement soutenu par le *Marie Curie Training Network*, intitulé ADONET de la Communauté européenne).

il oui ou non une méthode efficace pour en trouver une solution ? En gros, il se trouve que la plupart des problèmes que l'on rencontre se divise en deux grands ensembles, ceux pour lesquels il est possible de trouver des méthodes efficaces (classe des problèmes P), et ceux qui sont intrinsèquement difficiles (classe des problèmes NP-complets), sauf si $P=NP$. Ce phénomène sera l'un de nos fils conducteurs.

Le chapitre est divisé comme suit : dans la section 2, nous abordons la question des parcours, qui contient, entre autres, les parcours de rues d'une ville, et le trajet du voyageur de commerce. La section 3 est consacrée aux multiflots. La question du circuit électrique trouve sa réponse dans la Section 4, consacrée à la question de la coupe maximum dans les graphes.

Les notations et définitions concernant les graphes sont celles introduites dans le chapitre 1 du volume 1 de cet ouvrage, en particulier les définitions de *chaînes*, *cycles*, etc.

A celles-là, nous ajoutons encore la notion de *graphe pondéré* : un graphe pondéré est la donnée d'un graphe (orienté ou non) $G = (X, E)$ et d'une *fonction de poids*, qui est une application $w : E \rightarrow \mathbb{Z}$.

Nous introduisons également la notation suivante, très commode : si f est une application $Y \rightarrow (A, +)$, où A est un semi-groupe additif, pour $Z \subseteq Y$, on note :

$$f(Z) = \sum_{y \in Z} f(y)$$

Si f est une fonction de poids, on dira que $f(Z)$ est le poids de Z .

Dans le même ordre d'idée, si H est un graphe partiel de G , et si w est une fonction de poids sur les arêtes de G , le poids de H , noté $w(H)$ est égal à $\sum_{e \in E(H)} w(e)$.

Dans un graphe $G = (X, E)$, pour $Y \subseteq X$, la *coupe* $\delta(Y)$ (ou $\delta_E(Y)$ s'il y a ambiguïté) est l'ensemble des arêtes de E ayant une extrémité dans Y et l'autre dans $X \setminus Y$. Pour un graphe orienté, $\delta_E^+(Y)$ (resp. $\delta_E^-(Y)$) désigne l'ensemble des arcs qui ont leur origine dans Y (respectivement $X \setminus Y$) et l'autre extrémité dans $X \setminus Y$ (respectivement Y).

On dira que des chaînes ou des cycles C_1, C_2, \dots (respectivement des chemins ou des circuits) sont *arête-disjoints* (respectivement *arc-disjoints*) si pour tout paire i, j , $E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset$ (respectivement $A(C_i) \cap A(C_j) = \emptyset$).

On dira que des chaînes ou des cycles C_1, C_2, \dots (respectivement des chemins ou des circuits) sont *sommet-disjoints* si pour tout paire i, j , $X(C_i) \cap X(C_j) = \emptyset$.

Enfin, une dernière notation : si X et Y sont deux ensembles, $X \Delta Y$ est la différence symétrique de X et de Y : $X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

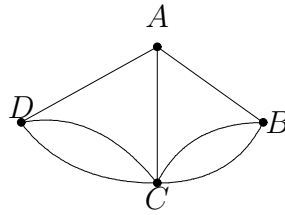


Figure 1.1. – *Le graphe représentant le problème des 7 ponts de Königsberg*

1.2. Parcours

1.2.1. Eulérien et hamiltonien

Cas des graphes non orientés

Les parcours constituent un des problèmes les plus anciens de la théorie des graphes. Historiquement, la première question connue de ce type a été posée à Euler en 1736 par les bourgeois de la ville de Königsberg. Le problème est présenté dans le chapitre 1 du volume 1. Rappelons simplement que cette ville possédait 7 ponts et l'on se demandait si un piéton pouvait en se promenant faire un parcours qui traversait chaque pont une fois et une seule. Ce problème se reformule : existe-t-il un parcours qui passe par chacune des arêtes du graphe de la figure 1.1 une fois et une seule ? Euler résolut rapidement la question par un argument de parité : un tel parcours n'existe pas.

Il y a une devinette classique qui est en réalité un problème de parcours : peut-on tracer la figure 1.2 sans lever la plume, et, si oui, comment faut-il procéder ?

Dans l'énoncé de ces deux problèmes, on reconnaît la question de l'existence d'un parcours qui passe par toutes les arêtes exactement une fois, c'est-à-dire que l'on se pose le problème suivant :

Problème du parcours eulérien

Données : Un graphe G ;

Question : Existe-t-il une chaîne simple de G qui contienne toutes les arêtes de G ?

Un tel parcours est appelé *chaîne eulérienne*, ou *chemin eulérien*.

Si la chaîne eulérienne est fermée (le premier et le dernier sommet du parcours sont identiques), alors elle est appelée *cycle eulérien*. Le problème du parcours des rues d'une ville en passant par chacune d'elles une fois et

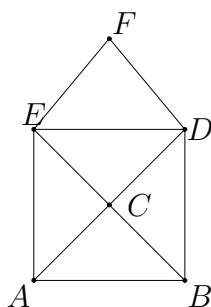


Figure 1.2. – *Peut-on tracer cette figure sans lever la plume ?*

une seule est donc un problème d'existence d'un cycle eulérien dans le graphe où les sommets sont les intersections de rues, et les arêtes sont les portions de rues entre les intersections.

Si l'on se pose la question de l'existence d'un parcours qui passe par tous les sommets d'un graphe exactement une fois, on est face au problème suivant :

Problème du parcours hamiltonien

Données : Un graphe G ;

Question : Existe-t-il une chaîne qui passe par tous les sommets exactement une fois ?

Un tel parcours est appelé *chaîne hamiltonienne*, ou *chemin hamiltonien*. Si le parcours est fermé, on parle de *cycle hamiltonien* : un cycle hamiltonien est un cycle élémentaire contenant tous les sommets du graphe.

Ces deux types de problèmes, l'existence de parcours eulérien et l'existence de parcours hamiltonien, bien que très similaires dans leur énoncé, sont en réalité totalement différents du point de vue de leur résolution : autant l'un est facile à résoudre, autant l'autre ne l'est pas. Savoir si un graphe donné contient une chaîne ou un cycle eulérien est facile et connu depuis longtemps, savoir s'il contient une chaîne ou un cycle hamiltonien est en général très difficile.

Pour les parcours eulériens, on a en effet le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. *Un graphe $G = (X, E)$ contient un cycle eulérien si et seulement si il est connexe et il n'a aucun sommet de degré impair.*

Un graphe $G = (X, E)$ contient une chaîne eulérienne si et seulement si il est connexe et le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou à 2.

PREUVE. Si un graphe contient une chaîne eulérienne, tout sommet du graphe, sauf le sommet de départ et le sommet d'arrivée s'ils sont distincts, est de degré pair : en effet, chaque passage sur un sommet du graphe utilise exactement deux arêtes incidents à ce sommet.

Pour montrer la réciproque, on va montrer par l'absurde que si un graphe n'a que des sommets de degré pair, alors il a un cycle eulérien. Le cas où il y a exactement deux sommets de degré impair découle automatiquement en ajoutant un arête fictive entre les deux sommets de degré impair.

On prend le plus grand (au sens du nombre d'arêtes) cycle C de G qui soit tel que $d_C(x)$ soit pair pour tout $x \in X$. Si C ne contient pas toutes les arêtes, alors il y a une arête $e = \{x, y\}$ qui a un sommet en commun avec C ; en effet, si ce n'était pas le cas, C serait une composante connexe de G , ce qui est impossible car G est connexe. On suppose, sans perte de généralité que x est ce sommet commun : $x \in C$.

On construit une chaîne dans le graphe $G - E(C)$ débutant en x avec cette arête, en utilisant chaque arête au plus une fois, aussi longtemps que cela est possible, de manière gloutonne. En tout sommet z différent de x , il y a un nombre pair d'arêtes dans $G - E(C)$. Par conséquent, la chaîne ne peut que revenir au bout d'un moment en x . En enchaînant ensuite avec les arêtes de C , on obtient un cycle C' , strictement plus grand que C , vérifiant $d_{C'}(x)$ pair pour tout $x \in X$. D'où la contradiction. \square

Pour savoir si un graphe contient une chaîne eulérienne, il suffit donc de regarder tour à tour tous les sommets du graphe. S'il y a deux sommets de degré impair, toute chaîne eulérienne a comme début et fin ces deux sommets. En appliquant le théorème 1.1. au problème des ponts de Königsberg, on voit que le parcours est impossible : il y a quatre sommets, et ils sont tous de degré impair. Pour la devinette de la figure 1.2, le graphe est connexe et possède deux sommets de degré impair. Pour trouver une solution, on peut appliquer l'algorithme de Fleury ci-dessous. Cela dit, la simplicité du dessin est telle que, en partant du sommet A ou du sommet B , il est difficile de ne pas y arriver du premier coup.

Un graphe possédant un cycle eulérien est dit *eulérien*. On a donc le résultat suivant, qui reformule le théorème 1.1. :

un graphe $G = (X, E)$ est eulérien si et seulement si (i) $E \neq \emptyset$, (ii) G est connexe et (iii) tous les sommets sont de degré pair.

Pour construire un cycle eulérien dans un graphe connexe $G = (X, E)$ ayant tous ces sommets de degré pair, on peut appliquer différents algorithmes, le plus simple étant celui de Fleury [5], qui peut se décrire de la manière suivante :

ALGORITHME DE FLEURY

1. Choisir un sommet x_0 , et poser $C := \emptyset$.
 2. Pour i allant de 1 à $|E|$:
 - choisir une arête e_i adjacente à x_{i-1} , qui ne déconnecte pas $G - E(C)$,
 - faire $C := C \cup \{e_i\}$ et définir x_i comme étant l'extrémité de e_i différente de x_{i-1} .
- (fin)

Pour montrer que cet algorithme est correct, c'est-à-dire que C est un cycle eulérien, il suffit de vérifier que l'on peut toujours choisir une telle arête e_i , ce qui est évident car $G - E(C)$ est connexe et possède d'après le théorème 1.1. une chaîne eulérienne qui débute en x_{i-1} (de degré impair dans $G - E(C)$).

Pour trouver une chaîne eulérienne dans un graphe ayant deux sommets impairs, il suffit d'ajouter une arête fictive entre les deux sommets de degré impair, appliquer l'algorithme de Fleury, puis supprimer l'arête fictive du cycle eulérien obtenu.

En revanche, on ne dispose d'aucun théorème équivalent, d'aucune méthode simple, permettant d'indiquer si un graphe considéré contient ou ne contient pas un parcours hamiltonien, comme en témoigne le théorème suivant, dont nous omettons la démonstration (voir chapitre 2 de ce volume) :

THÉORÈME 1.2. *Le problème de l'existence d'un cycle hamiltonien dans un graphe est NP-complet.*

Simplement échanger le mot arête par le mot sommet dans la recherche de parcours conduit à passer d'un problème trivial à un problème d'une difficulté insondable.

Cas des graphes orientés

On peut également parler de parcours eulériens et de parcours hamiltoniens dans le cas des graphes orientés. Nous avons alors des résultats similaires à ceux du cas non orienté. Nous les présentons ici de façon succincte. Les démonstrations, que nous omettons, sont semblables à celles du cas non orienté.

Un *chemin eulérien* est un chemin simple contenant tous les arcs du graphe. Si le chemin est fermé, c'est-à-dire si le premier et le dernier sommets coïncident, on parle de *circuit eulérien*. Dans une ville où il y a des sens interdits, la question de savoir s'il est possible de parcourir toutes les rues en

passant par chacune d'elles une fois et une seule est une question d'existence de parcours eulérien.

Un *chemin hamiltonien* est un chemin passant par tous les sommets une fois et une seule. Si le chemin est fermé, c'est-à-dire si le premier et le dernier sommets coïncident, on parle de *circuit hamiltonien* : un circuit hamiltonien est un circuit élémentaire contenant tous les sommets du graphe.

Pour les parcours eulériens dans un graphe orienté, on a le théorème suivant, qui implique que la vérification de l'existence d'un parcours eulérien est simple (et polynomiale) :

THÉORÈME 1.3. *Un graphe orienté $G = (V, A)$ contient un circuit eulérien si et seulement si il est connexe et si, pour tout sommet x , $d^+(x) = d^-(x)$.*

Un graphe orienté $G = (X, A)$ contient un chemin eulérien si et seulement si il est connexe, et si, pour tout sommet x , $d^+(x) = d^-(x)$, sauf peut-être pour deux sommets s et t tels que $d^+(s) = 1 + d^-(s)$ et $d^-(t) = 1 + d^+(t)$.

Pour savoir si un graphe contient un chemin eulérien, il suffit donc de regarder tour à tour tous les sommets du graphe. S'il y a deux sommets s et t tels que $d^+(s) = 1 + d^-(s)$ et $d^-(t) = 1 + d^+(t)$, tout chemin eulérien a comme début s et comme fin t .

Pour construire un circuit eulérien dans un graphe orienté connexe $G = (X, A)$ tel que pour tout $x \in X$, $d^-(x) = d^+(x)$, graphe appelé alors *graphe eulérien*, on peut appliquer une version adaptée de l'algorithme de Fleury.

ALGORITHME DE FLEURY BIS

1. Choisir un sommet x_0 , et poser $C := \emptyset$.
2. Pour i allant de 1 à $|A|$:
 - choisir un arc a_i quittant x_{i-1} , qui ne déconnecte pas $G - A(C)$,
 - faire $C := C \cup \{a_i\}$ et définir x_i comme étant l'extrémité de a_i différente de x_{i-1} .

(fin)

Pour trouver un chemin eulérien dans un graphe ayant 2 sommets s et t comme dans le théorème 1.3, il suffit d'ajouter un arc fictif (t, s) , appliquer l'algorithme de Fleury, puis supprimer cet arc du circuit eulérien obtenu.

Pour les parcours hamiltoniens, on a le théorème :

THÉORÈME 1.4. *Le problème de l'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe orienté est NP-complet.*

1.2.2. Postier et voyageur : présentations

La version optimisation du problème du parcours hamiltonien dans un graphe non orienté correspond au problème du voyageur de commerce, étudié en détail dans le chapitre 8 de ce volume, et qui peut se traduire sous la forme suivante :

Problème du voyageur de commerce :

Données : un graphe $G = (X, E)$, des poids sur les arêtes de G .

Question : trouver un cycle de poids minimum passant par tous les sommets au moins une fois.

La version optimisation du problème du parcours eulérien correspond au problème du postier chinois qui peut être énoncé sous la forme suivante :

Problème du postier chinois

Données : un graphe $G = (V, E)$, une fonction de poids $w : E \rightarrow \mathbb{N}^*$;

Question : trouver un cycle de poids minimum qui passe par toutes les arêtes au moins une fois.

Et tout comme précédemment, si l'on dispose d'une méthode efficace pour résoudre exactement le problème du postier chinois, méthode présentée dans la sous-section suivante, on n'en connaît pas pour le problème du voyageur de commerce. Pour reprendre la terminologie introduite au chapitre 2 du volume 1, on dit que le problème du voyageur de commerce est NP-difficile. Et il le reste si on suppose que G est un graphe complet : il suffit de voir que l'on peut se ramener au cas graphe complet en introduisant des arêtes de poids très grands entre les sommets non reliés.

Pour résoudre pratiquement le problème du voyageur de commerce, ou du moins trouver des solutions qui ne soient pas trop loin de l'optimum, de nombreuses techniques existent (heuristiques, *branch and bound*, etc.). C'est l'objet du chapitre 2 de ce volume.

1.2.3. Résolution du problème du postier

Le problème du postier revient à *choisir un sous-ensemble de poids minimum $F \subseteq E$ d'arêtes tel qu'en doublant – c'est à dire introduisant une copie parallèle supplémentaire des arêtes de F – on obtient un graphe eulérien*. En effet, si on a un parcours de postier, alors en introduisant autant de copies parallèles de chaque arête que le nombre d'utilisations de l'arête par le postier, on obtient évidemment un graphe eulérien ; inversement, en introduisant des copies parallèles de façon eulérienne, chaque cycle eulérien du graphe obtenu détermine un parcours de postier de la même longueur ; enfin il suffit de remarquer que, dans un parcours minimal, il n'y a pas plus d'une copie

supplémentaire d'une arête, puisque sinon on pourrait supprimer deux copies supplémentaires sans affecter ni la parité des sommets, ni la connexité, mais ceci diminuerait le poids total. On a donc le problème suivant :

Données : un graphe connexe $G = (X, E)$, une fonction de poids $w : E \rightarrow \mathbb{N}^*$.

Question : trouver $F \subseteq E$ de poids $w(F)$ minimum tel que, pour tout sommet $x \in X$, son degré dans (X, F) ait la même parité que dans G .

Il est naturel de considérer la généralisation d'Edmonds et Johnson de ce problème ([3]). Dans la suite de cette section, on suppose que le graphe $G = (X, E)$ est connexe et que $T \subseteq X$ avec $|T|$ pair. Un T -joint est un sous-ensemble $F \subseteq E$ tel que $d_F(x)$ est impair pour $x \in T$, et pair pour $x \notin T$. Le problème du postier chinois est équivalent au cas particulier du problème du T -joint de poids minimum, où T est l'ensemble de sommets de degré impair de G .

Problème du T -joint de poids minimum

Données : un graphe G , une fonction de poids $w : E \rightarrow \mathbb{Z}$, un sous-ensemble $T \subseteq X$ de cardinalité paire.

Question : trouver un T -joint de poids minimum.

Le problème du T -joint de poids minimum peut être résolu en temps polynomial pour des poids quelconques. En effet, comme l'indique la proposition 1.7 suivante, on peut ramener le calcul du T -joint de poids minimum pour des poids quelconques à celui du T -joint de poids minimum pour des poids positifs ou nuls. Comme indiqué plus bas, ce dernier problème se ramène lui à celui du couplage de poids minimum dans un graphe complet, qui se résout en temps polynomial.

Dans la suite, on aura régulièrement besoin de la propriété commode suivante :

LEMME 1.5. *Soit G un graphe. Si F et F' sont respectivement des T - et T' -joints, alors $F \Delta F'$ est un $T \Delta T'$ -joint.*

PREUVE. On a $d_{F \Delta F'}(x) \equiv d_F(x) + d_{F'}(x) \pmod{2}$. Donc si $x \in T \Delta T'$, $d_{F \Delta F'}(x) \equiv 1 \pmod{2}$ et si $x \notin T \Delta T'$, $d_{F \Delta F'}(x) \equiv 0 \pmod{2}$. \square

Si $G = (X, E)$ est un graphe, et w est une fonction de poids sur les arêtes, on note $E_- := \{e \in E : w(e) < 0\}$, et $T_- := \{v \in X : d_{E_-}(v) \text{ est impair}\}$. Si $w : E \rightarrow \mathbb{Z}$ et $F \subseteq E$, on note $w[F]$ la fonction $w[F] : E \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $w[F](e) = w(e)$ si $e \notin F$, et $w[F](e) = -w(e)$ si $e \in F$. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1.6. Soit $G = (X, E)$ un graphe, w une fonction de poids $E \rightarrow \mathbb{Z}$ et $T_0, T \subseteq X$. Supposons que $F_0, F \subseteq E$ soient respectivement des T_0 -joint et T -joint. Alors F est un T -joint de poids minimum pour les poids w si et seulement si $F \Delta F_0$ est un $T \Delta T_0$ -joint de poids minimum pour les poids $w[F_0]$.

PREUVE. Soit F_0 un T_0 -joint, et F un T -joint. D'après le Lemme 1.5, $F \Delta F_0$ est un $T \Delta T_0$ -joint. L'égalité $w(F) = w[F_0](F \Delta F_0) + w(F_0)$ implique que $w(F)$ est minimum si et seulement si $w[F_0](F \Delta F_0)$ est minimum. \square

En notant $|w|$ la fonction pour laquelle $|w|(e) := |w(e)|$ ($e \in E$), on a la proposition :

PROPOSITION 1.7. Soit $G = (X, E)$ un graphe, w une fonction de poids sur les arêtes et $T \subseteq X$. Alors l'ensemble F est un T -joint minimum pour la fonction de poids w si et seulement si $F \Delta E_-$ est un $T \Delta T_-$ -joint minimum pour la fonction de poids $|w|$.

PREUVE. Appliquer la proposition précédente à $F_0 := E_-$ et $T_0 := T_-$. \square

Maintenant que nous avons vu que l'on peut toujours se ramener au cas où tous les poids sont positifs ou nuls, il nous reste à présenter l'algorithme du T -joint de poids minimum dans ce dernier cas.

ALGORITHME DU T -JOINT DE POIDS MINIMUM DANS LE CAS OÙ TOUS LES POIDS SONT POSITIFS OU NULS :

1. Pour toute paire de sommets $s, t \in T$, calculer la plus courte chaîne entre s et t ; noter $\lambda(s, t)$ la longueur de la chaîne la plus courte.
 2. Déterminer un couplage parfait M de poids minimum du graphe complet sur T avec les poids λ (se référer au chapitre 5 du volume 1). Soient $s_i t_i$ ($i = 1, \dots, |T|/2$) les arêtes de ce couplage, et P_i ($i = 1, \dots, |T|/2$) les plus courtes chaînes correspondantes, c'est à dire $w(P_i) = \lambda(s_i, t_i)$.
 3. Rendre $F := \cup_{i=1}^n P_i$.
- (fin)

THÉORÈME 1.8. L'ensemble F rendu par l'algorithme est un T -joint de poids minimum, et $w(F) = \sum_{i=1}^n \lambda(s_i, t_i)$.

PREUVE. On montre d'abord que pour tout T -joint F' on peut construire un couplage de T avec un poids inférieur, donc :

$$\min\{w(F') : F' \text{ est un } T\text{-joint}\} \geq \text{valeur d'un couplage minimum pour } \lambda.$$

Si $T = \emptyset$, il n'y a rien à montrer. Si $T \neq \emptyset$, on considère une composante de F' contenant un nombre non nul de sommets de T , de degré impair dans cette composante. Cette composante doit en contenir un nombre pair. Soient $x, y \in T$ de tels sommets, et soit P une chaîne de F' qui joint x et y . Alors $F' \setminus P$ est un $T \setminus \{x, y\}$ -joint. Par récurrence, T admet un couplage parfait de poids inférieur à $w(F' \setminus P) + \lambda(x, y)$, et donc inférieur à $w(F' \setminus P) + w(P) = w(F')$.

Pour conclure, il suffit de montrer qu'à partir d'un couplage, on peut obtenir un T -joint F' de poids inférieur ou égal. Considérons donc un couplage de T , et les P_i correspondants.

Définissons $F' := \Delta_{i=1}^{|T|/2} P_i$. D'après le Lemme 1.5, F' est un T -joint. Et l'on a bien $w(F') \leq \sum_{i=1}^{|T|/2} \lambda(s_i, t_i)$. \square

Par conséquent, pour trouver le parcours du postier qui a le poids le plus petit, il suffit de trouver le T -joint de poids minimum, de doubler ensuite les arêtes de ce T -joint, et enfin trouver un cycle eulérien dans ce nouveau graphe (par l'algorithme de Fleury, par exemple).

1.2.4. Bonne caractérisation

On peut se demander, étant donné un graphe, ce qui empêche la présence d'un petit T -joint. Le théorème 1.11 ci-dessous, dû à Paul Seymour [15], donne une réponse à cette question lorsque l'on veut simplement minimiser la cardinalité dans le cas des graphes bipartis. Partant, cela donne également une réponse pour les graphes $G = (X, E)$ quelconques puisque, en insérant un sommet sur chaque arête, on obtient un graphe biparti dont tout T -joint minimum est de cardinalité double d'un T -joint minimum de G .

Nous verrons dans la section suivante que ce théorème a un autre grand intérêt, puisqu'il permet d'obtenir des résultats d'existence pour des multiflots entiers.

Le lemme suivant permet une première caractérisation d'un T -joint de poids minimum.

LEMME 1.9. *Etant donné $G = (X, E)$, une fonction de poids $w : E \rightarrow \mathbb{Z}$, un T -joint F et un \emptyset -joint C , $F \Delta C$ est un T -joint de poids minimum pour les poids w si et seulement si C est un \emptyset -joint de poids minimum avec les poids $w[F]$.*

PREUVE. Appliquons la proposition 1.6 à " F_0 " := F et " F " := C , où les notations entre apostrophes font référence à la notation de la Proposition 1.6. \square

Si $G = (X, E)$ est un graphe et $w : E \rightarrow \mathbb{Z}$ est tel que $w(C) \geq 0$ pour tous les cycles C de G , alors on dit que (G, w) est *conservateur*.

Le « lemme de Guan » que l'on trouve dans la littérature correspond au cas particulier où tous les poids des arêtes sont égaux à 1 et $C = \emptyset$, c'est-à-dire :

LEMME 1.10. *Etant donnés $G = (X, E)$ et une fonction de poids $w : e \in E \mapsto 1$, F est un T -joint de poids minimum pour la fonction de poids w si et seulement si $(G, w[F])$ est conservateur.*

PREUVE. Appliquer le lemme précédent à $C = \emptyset$. □

Si $Y \subseteq X$ et $|Y \cap T|$ est impair, alors $|\delta(Y) \cap F|$ est impair pour tout T -joint F . En effet, $|\delta(Y) \cap F|$ a la même parité que $\sum_{v \in Y} d_F(v)$, puisque dans cette somme les arêtes de $F \cap E(Y)$ sont comptées deux fois et les arêtes de $\delta(Y) \cap F$ sont comptées une fois. $|Y \cap T|$ et $|\delta(Y) \cap F|$ ont donc la même parité.

En particulier $|\delta(Y) \cap F| \geq 1$ si $|Y \cap T|$ est impair. Les coupes telles que $|Y \cap T|$ est impair sont appelées *T -coupes*. Si on a beaucoup de T -coupes disjointes, par exemple au moins k , on sait que tous les T -joints doivent être de cardinalité au moins k . On va noter par $\tau(G, T)$ la cardinalité du T -joint minimum et $\nu(G, T)$ le nombre maximum de T -coupes disjointes.

On a alors le théorème suivant, qui constitue le résultat principal de cette sous-section :

THÉORÈME 1.11. *Si le graphe $G = (X, E)$ est biparti, et connexe avec $T \subseteq X$, $|T|$ paire, alors $\tau(G, T) = \nu(G, T)$.*

Pour prouver ce théorème, nous spécialisons un argument présent dans [12]. La preuve utilise le théorème 1.13, énoncé plus loin et dont la démonstration occupe le reste de la sous-section.

PREUVE. Par la remarque qui précède l'énoncé du théorème on a $\tau(G, T) \geq \nu(G, T)$.

Pour montrer l'égalité, soit F un T -joint minimum de G , c'est à dire, $|F| = \tau(G, T)$. Par le lemme de Guan (voir Lemme 1.10), $(G, 1[F])$ est conservateur. Comme G est biparti, le théorème 1.13 (voir l'énoncé ci-après) assure l'existence de coupes disjointes, dont exactement $|F| = \tau(G, T)$ sont des T -coupes (rappelons que pour une coupe $\delta(Y)$ ($Y \subseteq X$) et un T -joint F on a $|Y \cap T| \equiv |\delta(Y) \cap F| \pmod{2}$). □

La fin de cette section est maintenant consacrée à la preuve du théorème 1.13, utilisé dans la démonstration du Théorème 1.11.

Rappelons qu'une chaîne simple peut passer plusieurs fois par le même sommet mais pas par la même arête. Pour $x, y \in X$ on va noter :

$$\lambda_w(x, y) := \min\{w(P) : P \text{ est une chaîne simple entre } x \text{ et } y\},$$

et appeler ce nombre la *distance* de x et y ; une chaîne simple P réalisant ce minimum pour w est appelée *plus courte chaîne*. Une plus courte chaîne entre des sommets a et b est un $\{a, b\}$ -joint de poids minimum, et, inversement, si un $\{a, b\}$ -joint de poids minimum contient un ou plusieurs cycles, ils sont de poids 0, et, en les supprimant, on obtient une plus courte chaîne.

LEMME 1.12. *Soient $G = (X, E)$ un graphe quelconque, $w : E \rightarrow \{-1, 1\}$ une fonction de poids telle que (G, w) soit conservateur, et C un cycle tel que $w(C) = 0$. Alors $(G, w[C])$ est aussi conservateur, et, pour toute paire de sommets $u, v \in X$, la distance de u et v pour les poids w est égale à la distance de u et v pour les poids $w[C]$.*

Avec un tout petit peu plus de travail, on pourrait déduire de ce lemme le résultat surprenant suivant : les distances dans un graphe conservateur de pondérations $-1, +1$, ne dépendent que de la parité de nombre d'arêtes de poids -1 en chaque sommet.

PREUVE. Comme (G, w) est conservateur, C est un \emptyset -joint de poids minimum. Donc par le lemme 1.10, $(G, w[C])$ est conservateur.

Soit maintenant P une plus courte chaîne pour w entre $u, v \in V$. Comme (G, w) est conservateur, P est un $\{u, v\}$ -joint de poids minimum. On utilise maintenant la proposition 1.6 avec les choix $F_0 := C$, $F := P$ (et donc $T_0 := \emptyset$, $T := \{u, v\}$) pour conclure que $P\Delta C$ est un $\{u, v\}$ -joint de poids minimum pour les poids $w[C]$. Comme $(G, w[C])$ est aussi conservateur, en supprimant les cycles de $P\Delta C$ on obtient une chaîne entre u et v de poids inférieur ou égal à $w[C](P\Delta C)$:

$$\lambda_w(u, v) = w(P) = w[C](P\Delta C) + w(C) \geq \lambda_{w[C]}(u, v) + 0.$$

En appliquant ce résultat $\lambda_w(u, v) \geq \lambda_{w[C]}(u, v)$ en échangeant les rôles de w et $w[C]$, on obtient $\lambda_{w[C]}(u, v) \geq \lambda_w(u, v)$, et le lemme est démontré. \square

THÉORÈME 1.13. *Si $G = (X, E)$ est un graphe biparti et $w : E \rightarrow \{-1, 1\}$ est une fonction de poids telle que (G, w) soit conservateur, alors il existe une partition de E en coupes telle que chaque coupe contient au plus une arête de E_- .*

PREUVE. Si $E_- = \emptyset$, on prend E comme unique coupe de la partition. Supposons donc $E_- \neq \emptyset$ et soit $x_0 \in X$ un sommet incident à une arête de E_- . Pour tout $x \in X$, soit $\lambda(x) := \lambda_w(x_0, x)$, et b un sommet pour lequel

$$\lambda(b) := \min\{\lambda(v) : v \in V\} \leq -1,$$

en particulier, $b \neq x_0$, puisque (G, w) est conservateur.

Considérons l'ensemble des chaînes simples entre x_0 et b de poids minimum pour w . Parmi ces chaînes, on choisit P la chaîne simple de plus petit $|P|$. Alors P ne contient pas de cycle, car sinon, par définition de P , et pour un tel cycle C , on aurait :

$$w(P) \leq w(P \setminus C) = w(P) - w(C),$$

c'est à dire $w(C) \leq 0$, donc $w(C) = 0$. Mais alors $P \setminus C$ serait alors aussi une chaîne simple entre x_0 et b , qui minimiserait $w(P)$, et qui aurait moins d'arêtes, en contradiction avec le choix de P . Donc P est une chaîne élémentaire.

Fait 1 : $|\delta(b) \cap E_-| = 1$.

En effet, $|\delta(b) \cap E_-| \geq 1$, parce que la dernière arête e d'une chaîne P entre x_0 et b qui minimise $w(P)$ parmi ces chaînes doit avoir $w(e) = -1$: si $w(e) = 1$, alors :

$$w(P \setminus \{e\}) < w(P) = \lambda(b)$$

contredit la définition de b .

S'il y avait deux arêtes dans $\delta(b) \cap E_-$, alors comme P est élémentaire, seulement une des deux est dans P . Soit f l'autre : $P \cup \{f\}$ est une chaîne simple, $w(P \cup \{f\}) < w(P)$, en contradiction avec la définition de b .

Fait 2 : si C est un cycle élémentaire qui passe par b et $w(C) = 0$, alors $C \cap \delta(b)$ contient deux arêtes, une négative, et une positive.

En effet, $|C \cap \delta(b)| = 2$, et par le fait 1, une seule des deux arêtes de $C \cap \delta(b)$ peut être négative. Il nous reste à montrer que les deux ne peuvent pas être simultanément positives.

Si c'était le cas, $w[C]$ aurait deux arêtes négatives incidentes à b . Or, par le Lemme 1.12., $(G, w[C])$ est conservateur et les distances définies par les poids $w[C]$ restent inchangées; en particulier la distance de b et x_0 avec les poids $w[C]$ reste minimum parmi tous les sommets. Donc, $\delta(b)$ contiendrait strictement plus d'une (exactement 3) arête négative de $w[C]$, ce qui est en contradiction avec le fait 1 appliqué à $w[C]$ au lieu de w .

Fait 3 : $G^* := G/\delta(b)$ (on contracte les arêtes de $\delta(b)$) est conservateur pour la pondération obtenue en conservant les poids des arêtes non contractées.

En effet, supposons que C^* soit un cycle élémentaire de G^* contenant b , avec $w(C^*) < 0$. Comme G^* est biparti, $w(C^*) \leq -2$. Si on note ε le poids total des deux arêtes contractées dans le cycle correspondant à C^* dans G , on a $\varepsilon \leq 2$. Comme (G, w) est conservateur,

$$0 \leq w(C^*) + \varepsilon \leq -2 + 2 = 0.$$

On a donc l'égalité partout, c'est à dire $w(C^*) = -2$ et $\varepsilon = 2$. Mais alors, en ajoutant aux arêtes de C^* les deux arêtes contractées, on obtient un cycle de poids 0, et, par le fait 2, $\varepsilon = 0$ et non 2. Cette contradiction finit la preuve du fait 3.

Pour finir la preuve, on procède par induction. Comme G^* a strictement moins de sommets que G , il admet par induction une partition avec les propriétés voulues, et en ajoutant à cette partition la classe $\delta(b)$, par le fait 1, on a une partition de G avec la propriété énoncée. \square

1.3. Multiflots

1.3.1. Généralités

Dans cette section nous définissons les multiflots et donnons quelques propriétés et résultats les concernant. Dans deux sous-sections nous donnons les détails et preuves pour deux exemples concrets, un non-orienté, et un orienté.

Le problème du flot maximum, vu au chapitre 5 du volume 1, peut s'interpréter comme la question de l'optimisation de la quantité de matière traversant un réseau depuis une source s , jusqu'à un puits t . Il a été vu que, pour ce problème, les choses se passaient bien : on dispose d'algorithmes efficaces, et, si les capacités sur les arcs sont entières, il existe un flot maximum entier, que l'on sait tout aussi bien trouver. De plus, on dispose d'un théorème de dualité (flot maximum = coupe minimum) et si l'on met toutes les capacités à 1, le problème devient celui de la maximisation du nombre de chemins arcs-disjoints entre s et t (ainsi que celui de la maximisation du nombre de chemins sommets-disjoints, par une transformation assez simple), et le théorème max-flot-min-coupe est alors appelé théorème de Menger.

Qu'en est-il si on autorise dans ce réseau plusieurs types de matières différentes, chacune ayant sa source et son puits spécifique ? A-t-on également des algorithmes efficaces ? A-t-on des résultats de dualité, d'intégralité, comme dans le cas du flot à un seul type de matière ? Peut-on aussi résoudre le problème des chemins disjoints entre plusieurs paires de sommets du graphe ?

Ces questions sont celles qui sont couvertes par l'étude des *multiflots*. Elles sont d'un grand intérêt pratique, comme on l'imagine aisément : le problème dans toute sa généralité peut être vu comme celui de l'optimisation du transport de biens, ou de messages, différents, mais devant utiliser les mêmes axes de communications aux mêmes moments ; celui des chemins disjoints a de nombreuses applications, comme par exemple la conception de circuits intégrés où il faut relier des connecteurs par des fils de routage sur une puce sans que les fils s'intersectent.

Passons à la formalisation du problème de multiflot, sous la forme d'un problème :

Problème du multiflot (orienté)

Données : deux graphes orientés $G = (X, A)$ et $H = (X, R)$ définis sur le même ensemble de sommets, des capacités $c : A \rightarrow \mathbb{N}$, et des demandes $r : R \rightarrow \mathbb{N}$.

Question : trouver une famille de flots $(x_f)_{f \in R}$, où x_f est un $s - t$ flot de G pour tout $f = (t, s) \in R$, respectant la condition :

$$\sum_{f \in R} x_f(a) \leq c(a),$$

pour tout $a \in A$.

Tout comme dans le cas des flots, on a également la formulation dans le cas où le graphe G n'est pas orienté. On remplace chaque arête $\{u, v\}$ de G par deux arcs opposés : (u, v) et (v, u) , et l'on obtient le problème suivant :

Problème du multiflot non orienté

Données : deux graphes $G = (X, E)$ et $H = (X, R)$ définis sur le même ensemble de sommets, des capacités $c : E \rightarrow \mathbb{N}$, et des demandes $r : R \rightarrow \mathbb{N}$.

Question : trouver une famille de flots $(x_f)_{f \in R}$, où x_f est un $s - t$ flot du graphe $(V, \{(u, v), (v, u) : \{u, v\} \in E\})$ pour tout $f = \{t, s\} \in R$, respectant la condition :

$$\sum_{f \in R} (x_f((u, v)) + x_f((v, u))) \leq c(\{u, v\}),$$

pour tout $\{u, v\} \in E$.

Ces deux versions peuvent être bien sûr être résolues en temps polynomial car elles se formulent naturellement sous la forme d'un programme linéaire.

Si l'on ajoute la condition que chaque x_f est un flot entier, on parle alors de *multiflot* entier. Que G soit orienté ou non, il est NP-complet de décider s'il existe un multiflot entier. On peut avoir cependant quelques résultats

intéressants, comme par exemple le théorème suivant pour G non orienté, dû à Rothschild et Whinston ([11]) :

THÉORÈME 1.14. *Si les conditions suivantes sont toutes respectées :*

- $|R| = 2$,
 - les capacités et les demandes sont toutes entières,
 - $c(\delta_E(x)) + r(\delta_R(x))$ est pair pour tout $x \in X$,
- alors il existe un multiflot entier si et seulement si :

$$r(\delta_R(Y)) \leq c(\delta_E(Y)),$$

pour tout $Y \subseteq X$.

La condition $r(\delta_R(Y)) \leq c(\delta_E(Y))$ pour tout $Y \subseteq X$ s'appelle la *condition de coupes*.

On peut encore rajouter la condition que chaque capacité soit égale à 1, auquel cas le problème devient celui de l'existence de chaînes arêtes-disjointes ou de chemins arc-disjointes dans le graphe G . Là encore, même dans le cas où le nombre de terminaux est fixé, le problème est en général NP-complet. En témoigne le théorème suivant, prouvé par Fortune, Hopcroft et Wyllie en 1980 ([6]) :

THÉORÈME 1.15. *Le problème de l'existence de deux chemins arc-disjointes est NP-complet pour $k = 2$, même si $s_2 = t_1$ et $t_2 = s_1$.*

On dispose aussi de quelques résultats positifs, comme celui-ci, prouvé par les mêmes ([6]) :

THÉORÈME 1.16. *Pour tout k fixé, il existe un algorithme polynomial pour le problème de l'existence de k chemins sommet-disjointes dans un graphe orienté sans circuit.*

1.3.2. Exemple non orienté : multiflots planaires

Dans cette sous-section nous allons montrer un théorème de multiflots planaires que nous déduirons des résultats que nous avons énoncés sur les T -jointes.

Un graphe est appelé *planair*, si on peut plonger ses sommets et ses arêtes dans le plan de telle façon que les arêtes soient des courbes continues entre les extrémités, et qu'elles n'aient pas de points communs en dehors des extrémités. D'après un théorème de Fáry [4], un graphe planaire peut toujours être plongé dans le plan de façon à ce que toutes les arêtes soient

des segments de droites. Si on coupe le plan avec un ciseau en suivant les arêtes d'un graphe planaire, les morceaux qui tombent sont les faces.

Une opération simple mais profonde sur les graphes planaires est la dualité planaire. Seuls les graphes *planaires* admettent un dual. Le *dual* d'un graphe planaire $G = (X, E)$, dont une représentation planaire est donnée, est le graphe $G^D = (X^D, E^D)$, où les sommets sont les faces de G , $|E^D| = |E|$, et on a une bijection entre les arêtes $e \in E$ et leur dual $e^D \in E^D$.

On définit $e^D \in E^D$ comme l'arête qui joint les deux faces séparées par e . Il est possible que des deux côtés de e on ait la même face (arête d'articulation) en ce cas là, e^D sera une boucle dans le graphe dual. Pour $F \subseteq E$ on notera :

$$F^D := \{e^D : e \in F\}.$$

On a évidemment $(F^D)^D = F$ et $(G^D)^D = G$.

Le lecteur peut facilement se convaincre que $C \subseteq E$ est une coupe de G si et seulement si C^D est un circuit de G^D , et c'est un circuit de G si et seulement si C^D est une coupe de G^D .

La présence d'un graphe et de son dual dans une démonstration est très utile, et la reformulation des résultats pour le dual conduit souvent à d'autres résultats intéressants. En dualisant le théorème 1.13 ci-dessus, on obtient un autre théorème de Seymour ([15]), montrant les liens profonds qui unissent T -joints et multiflots planaires :

THÉORÈME 1.17. *Soient $G = (X, E)$ et $H = (X, R)$ deux graphes sur le même ensemble de sommets, tels que $G \cup H$ soit planaire et eulérien. Alors le problème des chaînes arête-disjointes a une solution si et seulement si :*

$$|\delta_R(Y)| \leq |\delta_E(Y)|$$

pour tout $Y \subseteq X$.

On retrouve la condition de coupes, présentée au théorème 1.14.

PREUVE. On définit sur le graphe $M = (G \cup H)^D$ les poids $w(e) = 1$ pour $e \in E^D$ et $w(e) = -1$ si $e \in R^D$. Comme $G \cup H$ est eulérien, M est biparti. Il est facile de vérifier que la condition de coupes est équivalent à la non-existence de circuits négatifs dans M avec les poids ainsi définis. Les conditions du théorème 1.13 sont donc vérifiées pour M , et, par ce théorème, on obtient un ensemble \mathcal{Q} de coupes de M , disjointes et contenant chacune exactement une arête de R^D ; on a immédiatement que $\{Q^D : Q \in \mathcal{Q}\}$ est un ensemble de cycles arêtes-disjointes dans $G \cup H$, contenant chacun une arête de R . \square

Le théorème 1.17 implique le théorème suivant (en dupliquant les arêtes), qui donne une condition plus générale d'existence de multiflots entiers :

THÉORÈME 1.18. Soient $G = (X, E)$ et $H = (X, R)$ deux graphes sur le même ensemble de sommets, tel que $G \cup H$ soit planaire et soient $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ et $r : R \rightarrow \mathbb{N}$ tels que $c(\delta_E(x)) + r(\delta_R(x))$ soit pair pour tout $x \in X$. Alors il existe un multiflot entier si et seulement si :

$$r(\delta_R(Y)) \leq c(\delta_E(Y))$$

pour tout $Y \subseteq X$.

De plus, lorsque les conditions du théorème 1.17 (respectivement du théorème 1.18) sont satisfaites, il existe un algorithme polynomial qui permet de trouver l'ensemble de chaînes arête-disjointes (respectivement le multiflot entier). Cela vient du fait que les démonstrations des théorèmes 1.13 et 1.11 (et leur versions pondérées non présentées dans ce chapitre) induisent des algorithmes polynomiaux.

Dans l'optique algorithmique, il est peut-être utile de souligner le fait suivant : dans la preuve du théorème 1.13, il faut calculer des distances minimales dans un graphe conservateur, c'est-à-dire des chaînes de poids minimal. Etant donné un sommet a et un sommet b , comment faire pour calculer la chaîne de poids minimal ? L'algorithme de Bellman ne s'applique qu'aux graphes orientés (voir chapitre 3 du volume 1). Si on oriente les arêtes d'un tel graphe, pour ne perdre aucune chaîne possible, il faut remplacer chaque arête par deux arcs d'orientations opposées ; mais un tel graphe contient alors des circuits absorbants, rendant impossible l'application de l'algorithme de Bellman : tout arête de poids négatif induit un circuit de deux arcs de poids négatifs. L'algorithme de Dijkstra, lui, ne s'applique que si les poids sont tous positifs. La solution consiste à chercher le $\{a, b\}$ -joint de poids minimum, qui sera précisément la chaîne de poids minimum entre a et b .

Un autre résultat sur les multiflots planaires qui a été résolu en utilisant les T -joints est le problème des multiflots entiers pour les graphes qui restent planaires lorsqu'on ajoute les arêtes de demandes, si le nombre de ces arêtes de demandes est borné par une constante :

THÉORÈME 1.19. Pour tout k fixé, il existe un algorithme polynomial qui, étant donné deux graphes $G = (X, E)$ et $H = (X, R)$, avec $|R| \leq k$ et $G \cup H$ planaire, une fonction de capacité $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ et une fonction de demande $r : R \rightarrow \mathbb{N}$, trouve un multiflot entier.

Ce théorème a été démontré par Seymour pour $k = 2$ et par Korach pour $k = 3$. Le cas général est démontré dans [13].

Si le nombre de demandes n'est pas borné le problème est NP-complet par un résultat de Middendorf et Pfeiffer [9].

1.3.3. Exemple orienté : 2-flots eulériens

Dans le cas orienté, un résultat d'András Frank [7] utilise également la condition de coupe :

THÉORÈME 1.20. *Soit $G = (X, A)$ un graphe orienté et soit R un ensemble de deux familles d'arcs parallèles tels que $(X, A \cup R)$ soit eulérien. Alors $|\delta_A^+(Y)| \geq |\delta_R^-(Y)|$ pour tout $Y \subseteq X$ (la condition de coupe) si et seulement si le problème des chemins arc-disjoints a une solution.*

PREUVE. R consiste en deux familles d'arcs parallèles de s_i à t_i pour $i = 1, 2$. Notons k_i le nombre d'arcs de R allant de s_i à t_i . La condition de coupe implique, par le théorème max-flot min-coupe, qu'il existe k_1 chemins arcs-disjoints de s_1 à t_1 . En effaçant ces k_1 chemins et les k_1 arcs de R du graphe de $(X, A \cup R)$, on obtient un graphe dont la composante connexe contenant s_2 et t_2 est eulérienne, ce qui implique l'existence de k_2 chemins arc-disjoints de s_2 à t_2 . \square

1.4. Coupes maximum

Les coupes maximum ont de nombreuses applications : dans la conception de circuits intégrés, dans les transports, en physique, etc. La première sous-section est consacrée à un exemple d'application des coupes maximum : le modèle d'Ising, très important en physique statistique, et qui continue de motiver des recherches intenses sur les coupes maximum.

Dans le chapitre 6 du volume 1, un algorithme polynomial pour le problème de la coupe minimum, ou problème min-cut, est donné. Il y est également démontré que le problème de la coupe maximum, ou problème max-cut, est NP-difficile. Nous sommes donc en présence du même genre de phénomènes que celui rencontré pour les parcours eulériens et hamiltoniens : en remplaçant juste un mot, en changeant minimum en maximum, le problème passe du statut de problème « facile » à celui de problème « difficile ».

Cela dit, il y a des résultats positifs pour le problème max-cut, comme indiqué dans le chapitre 6 du volume 1 : pour les graphes planaires, le problème peut être résolu en temps polynomial (ce sera l'objet de la sous-section 1.4.2), et pour les graphes en général, on dispose d'un algorithme efficace pour trouver une coupe de taille environ égale à 90% de la taille de la coupe maximum (ce sera l'objet de la sous-section 1.4.3).

1.4.1. Un exemple d'application des coupes maximum à la physique : le modèle d'Ising

Nous présentons maintenant une application des coupes maximum à la physique : plus précisément, au modèle d'Ising (introduit en 1925), qui permet d'étudier les propriétés d'un métal ferromagnétique. Cette application a été trouvée par Barahona, Maynard, Rammal et Uhry [1].

Les atomes forment les sommets d'un graphe, et ils interagissent entre eux. Certaines interactions sont négligeables, d'autres non. Chaque interaction non-négligeable est représentée par une arête. Cela donne un graphe $G = (X, E)$, dont la structure est en générale assez simple (une grille, un graphe planaire, etc.).

On suppose de plus que chaque atome a un « spin », qui est soit « up » soit « down ». Le *spin* de l'atome i est décrit par une valeur $\sigma_i \in \{-1, +1\}$. Si l'interaction des atomes i et j est non-négligeable, c'est-à-dire si une arête lie les sommets i et j du graphe, alors elle contribue de la quantité $J(i, j)\sigma_i\sigma_j$ à l'énergie totale du système. Etant donnée une configuration de spins, l'énergie totale du système est donc :

$$H = \sum_{\{i,j\} \in E} J(i, j)\sigma_i\sigma_j.$$

Si tous les $J(i, j)$ sont négatifs, l'état d'énergie minimale est obtenue lorsque tous les spins sont identiques, on dit que le matériau est ferromagnétique.

Mais il existe des matériaux pour lesquels les $J(i, j)$ sont en partie positifs. Si l'on note $S := \{i : \sigma_i = 1\}$, H peut s'écrire :

$$H = \sum_{\{i,j\} \in E} J(i, j) - 2 \sum_{\{i,j\} \in \delta(S)} J(i, j),$$

que l'on peut encore écrire :

$$H = J(E) - 2J(\delta(S)),$$

et les états d'énergie minimale correspondent aux coupes maximum de G pour la fonction de poids J .

1.4.2. Coupe maximum dans les graphes planaires

Réduction au problème du \emptyset -joint

Dans un graphe planaire, le problème de la coupe maximum n'est rien d'autre qu'un problème de T -joint optimal. En effet, comme nous l'avons noté

à la sous-section 1.3.2, une coupe est un cycle dans le graphe dual. Donc *le problème de la coupe maximum d'un graphe planaire se résout en cherchant le \emptyset -joint maximum dans le graphe dual.*

Trouver un T -joint de poids maximum peut se faire en temps polynomial, puisque un T -joint de poids minimum peut être trouvé en temps polynomial pour des poids quelconques. On peut donc trouver la coupe maximum d'un graphe planaire $G = (X, E)$ en cherchant le \emptyset -joint de poids maximal dans G^D , avec la fonction de poids : $w^D : e^D \in E^D \mapsto w(e) \in \mathbb{Z}$. Si Q^D est ce \emptyset -joint de poids maximum, alors Q est la coupe de poids maximum.

Cela dit, si on se limite à vouloir trouver une coupe de cardinalité maximum, une petite astuce permet de se ramener au cas du T -joint de cardinalité minimum :

THÉORÈME 1.21. *Soit $G = (X, E)$ un graphe planaire, et soit T l'ensemble de sommets de degrés impairs de $G^D = (X^D, E^D)$ (c'est à dire l'ensemble des « faces impaires » de G). Alors Q est une coupe maximum de G si et seulement si $E^D \setminus Q^D$ est un T -joint minimum de G^D .*

PREUVE. Si Q est une coupe maximum, Q^D est un \emptyset -joint maximum, et $E^D \setminus Q^D$ est un T -joint minimum de G^D .

Réciproquement, si F est un T -joint minimum de G^D , $Q^D := E^D \setminus F$ est un \emptyset -joint maximum de G^D , et Q une coupe maximum de G . \square

Pour trouver une coupe maximum dans un graphe planaire G , il suffit de trouver F le T -joint minimum de G^D , où T est l'ensemble des sommets impairs de G^D , et de prendre les arêtes du dual de $E^D \setminus F$.

Le cas des graphes sans mineur K_5

Le même résultat, comme souvent pour les graphes planaires, se généralise aux graphes n'ayant pas K_5 comme mineur. En effet, par un résultat de Wagner [16], ces graphes « se décomposent » en graphes planaires et en des copies d'un graphe appelé V_8 qui est un cycle à huit sommets avec toutes les diagonales qui joignent des sommets opposés. Les opérations qui décomposent - ou plutôt qui composent - les graphes sans mineurs K_5 sont les opérations de 1-somme, 2-somme ou 3-somme : la 1-somme est simplement l'opération qui consiste à coller deux graphes par un sommet ; la 2-somme est l'opération qui consiste à coller deux graphes par une arête et supprimer l'arête - qui s'appelle le *marqueur* de l'opération ; la 3-somme est l'opération qui consiste à coller par un triangle et supprimer les arêtes du triangle, les *marqueurs*.

En utilisant le théorème de Wagner, il suffit de vérifier que le théorème est vrai pour la composition de deux graphes pour lesquels le théorème est



Figure 1.3. – Codage du graphe planaire pour résoudre le problème de Pinter

vrai, et qu'il est vrai aussi pour V_8 . Cette vérification n'est pas complètement immédiate quand on la fait la première fois, mais le lecteur ambitieux pourra le faire en utilisant toujours la même idée : le problème sur le graphe composé peut être réduit aux deux graphes qui le composent en mettant un nombre approprié d'arêtes parallèles ou en série avec le marqueur (voir l'article de Paul Seymour [14]).

Une application : le problème de Pinter

Une application de la polynomialité du problème de coupe maximum dans les graphes planaires est la résolution du problème de Pinter [10], qui se formule de la manière suivante : le dessin d'un circuit électrique est donné et l'on veut le graver sur une plaque. Ce dessin est donné par la représentation planaire d'un graphe $G = (X, E)$. Or cette représentation possède des arêtes qui se coupent. On autorise des gravures sur les deux faces de la plaque, et on permet de percer la plaque pour faire passer les arêtes d'une face à l'autre. La question est alors de minimiser le nombre de trous.

Pour cela, on introduit un graphe $G' = (X', E')$ annexe dont les sommets sont (a) tous les sommets de G , auxquels on ajoute (b) les points d'intersection des arêtes de G dans sa représentation planaire (voir figure 1.3). Les arêtes de G' sont les portions d'arêtes entre les éléments de X' . G' est donc un graphe planaire.

On remarque que, quel que soit G , il y a toujours une solution au problème de Pinter : il suffit pour cela de fixer à chaque intersection de deux arêtes e et f de G la face de la plaque où se trouve e et d'attribuer l'autre face à f . Ensuite, pour chaque arête $e' = \{x', y'\}$ de G' provenant d'une arête e de G , on regarde si les faces sur lesquelles e est tracée sont différentes en x' et y' , auquel cas on perce un trou au milieu de e' , permettant ainsi à e de changer de face entre x' et y' .

Supposons donc que nous ayons construit une telle solution, à t trous. Elle peut être loin de l'optimum, mais elle va nous permettre de le trouver. On met un poids $w(e') = 1$ sur l'arête $e' \in E'$ s'il y a changement de face, et -1 sinon.

Considérons maintenant une autre solution. Les attributions des faces de la plaque aux différentes arêtes de G diffèrent sur un sous-ensemble $Y \subseteq X'$ des sommets du graphe G' . Le nombre de trous à percer pour cette nouvelle solution est $t - w(\delta(Y))$.

Souhaitant minimiser le nombre de trous à percer, l'optimum sera donc atteint lorsqu'on inversera les faces affectées aux arêtes sur l'ensemble Y qui maximise la quantité : $w(\delta(Y))$.

C'est un problème de coupe maximum dans un graphe planaire, ici G' , qui se résout en temps polynomial en cherchant le \emptyset -joint de poids maximal dans le graphe G'^D , avec la fonction de poids $w^D : e^D \in E^D \mapsto w(e) \in \{-1, +1\}$.

1.4.3. Approximations des coupes max en général

Rappelons que le problème de la coupe maximum dans un graphe peut se formuler sous la forme :

Problème de la coupe maximum

Données : un ensemble fini $X = \{1, \dots, n\}$ et des poids w_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) sur les arêtes du graphe complet (non-orienté) sur X .

Question : trouver une partition $\{A, B\}$ de X qui maximise :

$$\sum_{i \in A, j \in B} w_{ij}.$$

Rappelons également que l'on a le théorème suivant, démontré à la fin du chapitre 6 du volume 1.

THÉORÈME 1.22. *Le problème de la coupe maximum est NP-difficile.*

Il n'y a donc pas d'espoir de le résoudre exactement, à moins que $P=NP$. En revanche, Goemans et Williamson [8] ont donné un algorithme polynomial permettant de toujours trouver une coupe valant à peu près 90% de l'optimum. Plus exactement on peut être sûr que ce qu'on trouve est supérieur au maximum multiplié par 0,878.

THÉORÈME 1.23. *On peut trouver une coupe de poids supérieur à 0,878 fois la valeur maximum d'une coupe en temps polynomial.*

PREUVE. Il existe une méthode permettant de résoudre le problème consistant à placer n points sur la sphère de dimension n et à maximiser :

$$(*) \quad \sum_{1 \leq i < j}^n \text{dist}(x_i, x_j)^2 w_{ij},$$

où x_i, x_j représentent les sommets i, j , et $\text{dist}(a, b)$ est la distance euclidienne de a et b . A la fin de la preuve, nous dirons quelques mots supplémentaires sur cette méthode. Pour le moment, il suffit de savoir qu'il est possible de déterminer le maximum S de la somme dans $(*)$ en temps polynomial.

Si nous choisissons la sphère de diamètre 1, *le maximum S de la somme dans $(*)$ nous donne une borne supérieure sur la valeur maximum M d'une coupe :*

$$M \leq S.$$

En effet, si la partition $\{A, B\}$ définit une coupe max, alors en plaçant tous les sommets dans deux points antipodaux de la sphère, on obtient une solution qui, comme choix dans $(*)$, donne une valeur égale à M , donc inférieure ou égale au maximum de cette expression !

Donc S est trop grand pour qu'on puisse trouver une coupe de taille S . L'idée de Goemans et Williamson est de construire à partir de la solution x une coupe de taille S' , où S' est la somme qui correspond à $(*)$ avec une petite modification. On peut montrer que S' n'est pas beaucoup plus petit que S .

Pour introduire S' , on mesure les distances des points sur la sphère en *demi-tours* : la mesure d'un demi-tour π radians sur la sphère est 1 et les autres distances ont une mesure proportionnelle. Notre mesure de la distance des points sphériques x, x' est α/π si α est la mesure en radians de l'angle xOx' , où O est le centre de la sphère. On note cette mesure de distance sphérique : $\text{angle}(x, x')$.

On définit maintenant S' à partir de S , en *remplaçant dans $(*)$ la quantité $\text{dist}(i, j)^2$ par $\text{angle}(x_i, x_j)$.*

Il est aisé de voir qu'un hyperplan aléatoire qui passe par l'origine sépare x_i et x_j avec la probabilité $\text{angle}(x_i, x_j)$. Un hyperplan sépare les sommets en deux en définissant une partition. Et donc l'espérance mathématique de la contribution de l'arc ij à la coupe choisie est $\text{angle}(x_i, x_j)w_{ij}$. Par conséquent l'espérance mathématique de la coupe est juste S' , ce qui implique l'existence d'une coupe de taille au moins S' . On a donc :

$$S' \leq M \leq S.$$

(Les auteurs ne connaissent pas une démonstration directe de l'inégalité $S' \leq S$ qui en est la conséquence). On verra, quelques lignes plus bas, que cette inégalité n'est pas vraie pour les membres de la somme, membre par membre : $\text{angle}(x_i, x_j)$ peut être plus grand que $\text{dist}(x_i, x_j)^2$.

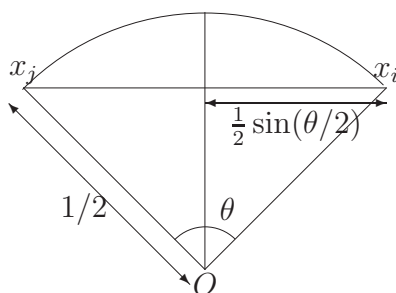


Figure 1.4. –

En montrant que S' n'est pas beaucoup plus petit que S : $0,878S \leq S'$, on aura l'encadrement :

$$0,878M \leq 0,878S \leq S',$$

ce qui démontrera le théorème. Il nous suffit donc de montrer que *l'angle divisé par la distance au carré reste toujours supérieur ou égal à 0,878*. En considérant l'intersection de l'hyperplan contenant x_i, x_j et O avec la sphère, on se ramène à un calcul élémentaire en dimension 2 :

Pour toute corde de longueur d du cercle de diamètre 1, et l'angle θ (en radians) qui la voit, on doit montrer que l'on a :

$$0,878d^2 \leq \frac{\theta}{\pi}.$$

Pour le faire, il suffit (voir figure 1.4) de minimiser la fonction élémentaire :

$$f(\theta) := \frac{1}{\pi} \frac{\theta}{\sin^2(\theta/2)},$$

et de montrer que le minimum est supérieur à 0,878. On vérifie aisément que $f(\theta)$ est égale à 1 si $\theta = \pi/2$ ou $\theta = \pi$, et on montre facilement que $f(\theta)$ est supérieur à 1 si $\theta < \pi/2$. Il suffit donc d'étudier la fonction dans l'intervalle $[\pi/2, \pi]$.

La fonction est dérivable sur cet intervalle, et sa dérivée est :

$$f'(\theta) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2(\theta/2) - \theta \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Les minima sur l'intervalle $\pi/2 < \theta < \pi$ vérifient $f'(\theta) = 0$, c'est-à-dire $\tan(\theta/2) = \theta$. Il nous reste donc à résoudre l'équation $\tan(\theta/2) = \theta$. Ce qui peut être fait par des méthodes standard : dichotomie, algorithme de Newton,

méthode de gradient, ou simplement en utilisant des logiciels que le font très bien : Matlab, Scilab, Mathematica, Maple, etc.

On a une solution unique $\theta = 2,33112$ pour laquelle $f(\theta) = 0.878567$, et en effet, $f'(\theta)$ change de signe en $\theta = 2,33112$ - elle est négative avant, et positive après. L'inégalité est démontrée.

Pour conclure que l'on dispose d'un algorithme polynomial, il faut voir que le programme (*) peut se résoudre en temps polynomial. Un tel programme est appelé *programme semi-défini*. Le lecteur familier de l'algèbre linéaire pourra facilement démontrer que ce problème d'optimisation est équivalent à celui de déterminer la matrice symétrique semi-définie $X_{n \times n}$ dont les entrées sur la diagonale sont égales à 1, et pour laquelle

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} X_{ij} w_{ij}$$

est minimal.

Un programme semi-défini peut être résolu en temps polynomial car la contrainte « être semi-définie » est une contrainte qui peut être traitée de manière similaire à la non-négativité en programmation linéaire (voir [2]).

Le théorème est démontré. \square

La méthode de Goemans et Williamson - la relaxation par la programmation semi-définie - fait maintenant partie des outils utilisés par l'optimisation combinatoire. Elle a entre autres été appliquée avec succès à d'autres problèmes, comme celui du stable maximum d'un graphe.

Bibliographie

- [1] F. Barahona, R. Maynard, R. Rammal et J.-P. Uhry, Morphology of ground states of a two dimensional frustration model, *J. Phys. A. Math. Gen.*, 15 :673-699, 1982.
- [2] M. Grötschel, L. Lovász et A. Schrijver, Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization, Springer, Berlin, 1988.
- [3] J. Edmonds et E. L. Johnson, Matching, Euler tours and the Chinese postman, *Mathematical Programming*, 5 :88-124, 1973.
- [4] I. Fáry, On straight line representation of planar graphs, *Acta. Sci. Math. Szeged*, 11 :229-233, 1948.
- [5] Fleury, Deux problèmes de géométrie de situation, *Journal de mathématiques élémentaires*, 257-261, 1883.

- [6] S. Fortune, J. Hopcroft et J. Wyllie, The directed subgraph homeomorphism problem, *Theoretical Computer Science*, 10 :111-121, 1980.
- [7] A. Frank, On connectivity properties of Eulerian digraphs, *dans Graph theory : in memory of G. A. Dirac* (Sandbjerg, Denmark, 1985 ; L. Dovling Andersen, I. Tafteberg Jakobsen, C. Thomassen, B. Toft, P. D. Vestergaard, Eds.), North-Holland, Amsterdam, 179-194, 1989.
- [8] M. X. Goemans et D. P. Williamson, Improved Approximation Algorithms for Maximum Cut and Satisfiability Problems Using Semidefinite Programming, *J. ACM*, 42 :1115-1145, 1995.
- [9] M. Middendorf et F. Pfeiffer, On the complexity of the disjoint paths problem, *dans Polyhedral Combinatorics*, 1990, DIMACS 1, AMS, ACM (W. Cook et P. Seymour, Eds.), 171-178.
- [10] R. Y. Pinter, Optimal layer-assignment for interconnect, *Proc. IEEE Int. Conf. Circuits and Computers*, 398-401, 1982.
- [11] B. Rothschild et A. Whinston, On two-commodity network flows, *Operation Research*, 14 :377-387, 1966.
- [12] A. Sebő, Potentials in undirected graphs and planar multiflows, *SIAM J. Comput.*, 26 :582-603, 1997.
- [13] A. Sebő, Integer Plane Multiflows with a Fixed Number of Demands, *J. Comb. Theory B*, 59 :163-171, 1993.
- [14] P. Seymour, Matroids and multicommodity flows, *Eur. J. Comb.*, 2 :257-290, 1981.
- [15] P. Seymour, On odd cuts and plane multicommodity flows, *Proc. London Math. Soc. Ser. (3)*, 42 :178-192, 1981.
- [16] K. Wagner, Über einer Eigneschaft ebener Komplexe, *Math. Annalen*, 114 :570-590, 1937.