Remise à niveau L3 - Logique dans la pratique

Aurélie Lagoutte

Partie cours : `https://cahier-de-prepa.fr/mpsi2-kerichen/download?id=159` et `http://mapage.noos.fr/jerome.giovendo/209logiqueIMPLICATION.pdf`

Objectifs :

- Savoir utiliser correctement les opérateurs logiques (dont implication, équivalence) au service d'un raisonnement mathématique.
- Comprendre et maîtriser les quantificateurs $\exists, \forall$
- Savoir écrire la négation d'une formule avec quantificateur.

Compléments :

- Le domaine d'une variable est l'ensemble des valeurs qu'une variable peut prendre. Par exemple dans $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + 2 \geq x - 3$, le domaine de x est $\mathbb{R}$.
- Une variable qui est précédée d'un quantificateur avant sa première occurrence est dite *variable liée*[1] ; une variable qui n'est pas liée est dite *variable libre*.
- Une variable liée peut être renommée librement : par exemple $\forall x \in \mathbb{R} \quad x + 2 \geq x - 3$ est la même assertion que $\forall y \in \mathbb{R} \quad y + 2 \geq y - 3$.
- Il est théoriquement possible qu'une variable soit libre et liée à la fois (par exemple : $x + 2 \geq 5 \text{et} \forall x \in \mathbb{N} x \geq 0$) mais on évitera ce cas de figure autant que possible pour éviter toute ambiguïté.
- La *contraposée* d'une implication $p \implies q$ est (non q) $\implies$ (non p).
- La *réciproque* d'une implication $p \implies q$ est $q \implies p$.

Exercice 1 : Les implications suivantes sont-elles vraies ?

(a) Paul mesure 192 cm $\implies$ Paul ne peut pas emprunter une porte de 180cm sans se baisser.
(b) La Terre est ronde $\implies$ L'eau mouille.
(c) La Terre est plate $\implies$ un poisson de 2 mètres est plus long qu'un poisson de 1 mètre.
(d) La Terre est plate $\implies$ 2+2=6

Exercice 2 : Les équivalences suivantes sont-elles vraies ?

(a) Non((Paul est grand) et (Marie est blonde)) $\iff$ (Paul est petit) et (Marie n'est pas blonde)
(b) Non((Paul est grand) et (Marie est blonde)) $\iff$ (Paul est petit) ou (Marie n'est pas blonde)
(c) La Terre est plate $\iff$ un poisson de 2 mètres est plus long qu'un poisson de 1 mètre.
(d) La Terre est plate $\iff$ 2+2=6

Exercice 3 : Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

(a) $\forall x \in \emptyset \quad x + 2 = x + 5$
(b) $\forall x \in \emptyset \quad x + 2 = x + 1 + 1$
(c) $\exists x \in \emptyset \quad x + 2 = x + 5$
(d) $\exists x \in \emptyset \quad x + 2 = x + 1 + 1$

1. Plus exactement, une variable est liée si toutes ses occurrences dans une formule sont sous la portée d'un quantificateur.

Exercice 4 : Les implications suivantes sont-elles vraies ?

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \geq 5 \implies x \geq 0)$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \text{ est pair } \implies n \geq 0)$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n < 0 \implies n + 2 = 5)$

(d) Soit E un ensemble infini d'entiers positifs. $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \in E \implies \exists m \in E \quad m \geq n)$.

Exercice 5 : Écrire la négation des prédicats P suivants, qui sont tous des implications.

(a) Soit Paul un étudiant qui s'appelle "Paul". $P(\text{Paul}) = (\text{Paul est grand} \implies \text{Paul est blond})$

(b) Soit f une fonction. $P(f) = (f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \implies f \text{ est continue sur } \mathbb{R})$

(c) Soit n un entier. $P(n) = (n \text{ est un multiple de } 4 \implies n \text{ est un multiple de } 2)$.

(d) Soit n un entier. $P(n) = (n \text{ est un multiple de } 3 \implies n \text{ est un multiple de } 2)$.

Exercice 6 : Pour chaque prédicat P de l'exercice précédent, en respectant le domaine indiqué ...

Question 1 – ... l'assertion $\forall x P(x)$ est-elle vraie ?

Question 2 – ... l'assertion $\exists x P(x)$ est-elle vraie ?

Exercice 7 : **Contraposée et équivalence**

Question 1 – La contraposée d'une implication est-elle équivalente à l'implication elle-même ?

Question 2 – La réciproque d'une implication est-elle équivalente à l'implication elle-même ?

Exercice 8 : Soit D et E deux ensembles de réels. Écrire la négation des formules suivantes.

(a) $\forall x \in D \quad x \geq 0$

(b) $\forall x \in D \ \exists y \in E \quad x = y + 2$

(c) $\forall x \in D \quad x \geq 0 \implies x \geq 5$

(d) $\exists x \in D \quad x \geq 0$

(e) $\exists x \in D \ \forall y \in E \quad x = y + 2$

(f) $\exists x \in D \quad x \geq 0 \implies x \geq 5$

Exercice 9 : On considère les formules ci-dessous.

(a) $\forall x \in D \quad x \geq 1$

(b) $\forall x \in D \ \exists y \in E \quad x = y + 2$

(c) $\forall x \in D \quad x \geq 0 \implies x \geq 5$

(d) $\exists x \in D \quad x \geq 0$

(e) $\exists x \in D \ \forall y \in E \quad x = y + 2$

(f) $\exists x \in D \quad x \geq 0 \implies x \geq 1$

Dites pour chaque formule ci-dessus si elle est vraie ou fausse ...

Question 1 – ... en prenant $D = [-3.5; 2] \cup [10; +\infty]$ et $E = \mathbb{R}$.

Question 2 – ... en prenant $D = \emptyset$ et $E = \mathbb{R}$.

Question 3 – ... en prenant $D = \mathbb{R}$ et $E = \emptyset$.

Question 4 – ... en prenant $D = [3; +\infty]$ et $E = [4; +\infty]$.

Question 5 – ... en prenant D et E égaux à l'ensemble des entiers pairs.

Exercice 10 : Pour chacune des formules de l'exercice précédent, essayez de trouver un choix de D et E pour lequel elle est vraie puis un choix de D et E pour lequel elle est fausse.

Exercice 11 : **Des petites preuves**

Question 1 – Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est impair alors n^2 est aussi impair.
Question 2 – Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est multiple de 3 alors n^2 est divisible par 9.

Exercice 12 : **Preuves par récurrence sur les arbres binaires**

Soit T un arbre binaire de hauteur h.

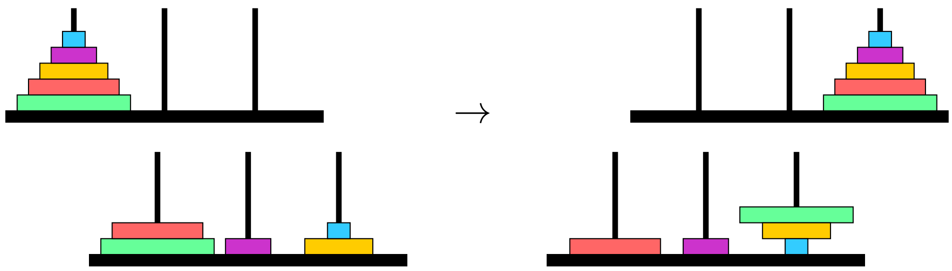
Question 1 – Quel est le nombre maximum de noeuds dans T en fonction de h ? Montrez-le par récurrence sur h.
Question 2 – Quel est le nombre maximum de feuilles dans T en fonction de h ? Montrez-le par récurrence sur h.

Exercice 13 :

Montrer qu'avec des timbres de 3 et 5 euros, on peut faire des affranchissements pour toutes les sommes entières de plus de 8 euros. (Indice : il faut faire une récurrence à 3 crans).

Exercice 14 :

Dans le jeu des tours de Hanoi, il y a 3 pics et n disques. Les disques ont tous des tailles différentes. On numérote les disques du plus petit (1) au plus grand (n). Au départ tous les disques sont disposés du plus grand au plus petit sur un des pics. Il faut déplacer tous les disques pour les mettre sur un autre pic. Un "coup" consiste à déplacer un disque du dessus d'une pile vers le dessus d'une autre pile. De plus, il est interdit de poser un disque sur un disque plus petit



Autorisée   Interdite

Question 1 – Montrer par récurrence qu'il faut au moins $2^n - 1$ coups pour pouvoir déplacer toute la pile de n jetons.
Question 2 – Montrer par récurrence qu'il existe une solution à $2^n - 1$ coups pour déplacer toute la pile de n jetons.