

Énumération et reconfiguration combinatoire dans les graphes

Aurélie Lagoutte
MCF G-SCOP, Grenoble INP / Université Grenoble Alpes

Journées G-SCOP – 2 juin 2023

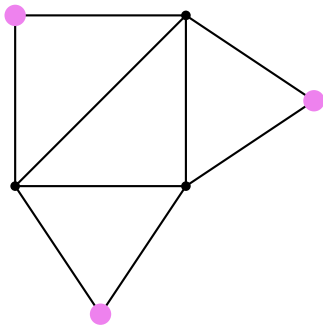
Optimisation

Entrée: Graphe G

Sortie : un stable de taille **maximum**

NP-complet

(difficile à résoudre "vite")



But : calculer (vite) **une** solution optimale

- 1 Optimisation
- 2 Énumération**
- 3 Reconfiguration
- 4 Conclusion

Énumération : principe

Certains problèmes nécessitent en réponse une **liste** de solutions, plutôt qu'**une** solution. Par exemple :

Énumération : principe

Certains problèmes nécessitent en réponse une **liste** de solutions, plutôt qu'**une** solution. Par exemple :

- Réponse à une requête de base de données

```
$ select appellation, vignoble, type from AOC
```

Côte-Rôtie		Vallée du Rhône		Rouge
Saint-Emilion		Bordeaux		Rouge
Saint-Nicolas-de-Bourgueil		Val de Loire		Rouge

Énumération : principe

Certains problèmes nécessitent en réponse une **liste** de solutions, plutôt qu'**une** solution. Par exemple :

- Réponse à une requête de base de données

```
$ select appellation, vignoble, type from AOC
```

Côte-Rôtie	Vallée du Rhône	Rouge
Saint-Emilion	Bordeaux	Rouge
Saint-Nicolas-de-Bourgueil	Val de Loire	Rouge

- Table de vérité : lister toutes les combinaisons d'entrées

e_1	e_2	e_3	S
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Énumération dans les graphes : cas d'usage

- Bases de données orientée graphes : réponse à une requête
- Modélisation par le graphe inexacte : certaines solutions sont *meilleures* par des critères qualitatifs, il faut les examiner une par une
- Identifier tous les motifs problématiques (ou intéressants!) dans un réseau

Domaines d'applications: bioinformatique (arbres phylogénétiques), chimie (structure de molécules), modélisation de systèmes complexes, bases de données...

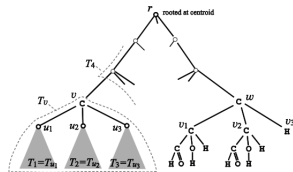


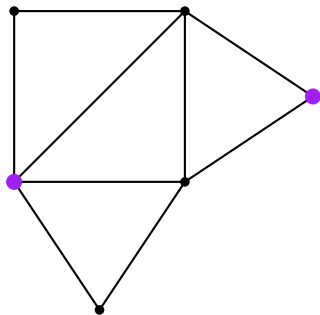
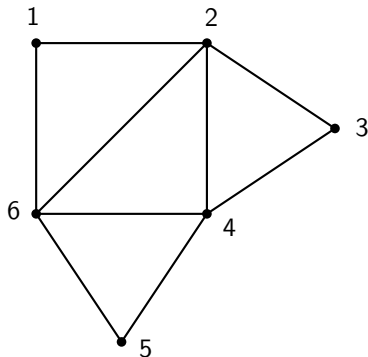
Schéma d'un stéréoisomère¹

¹Comparison and Enumeration of Chemical Graphs, T. Akutsu, H. Nagamochi, *Comp. and Struct. Biotechnology Journal*

Énumération : un exemple typique

Entrée: Graphe G

Sortie : La liste de tous les stables **maximaux** (par inclusion) de G



$\{1, 3, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}$

Facile d'obtenir une (première) solution : $\in P$ (glouton)

Complexité de l'énumération

Complexité \approx temps d'exécution d'un algorithme

En fonction de $n = \text{nb de sommets en entrée}$

En optimisation : "efficace" = complexité **polynomiale** en n

Complexité de l'énumération

Complexité \approx temps d'exécution d'un algorithme

En fonction de $n = \text{nb de sommets en entrée}$

En optimisation : "efficace" = complexité **polynomiale** en n

En énumération: nombre **exponentiel** de solutions à lister
(ex: $3^{n/3}$ stables max. où $n = \text{nb de sommets}$)

\Rightarrow Bonne mesure de complexité?

Complexité de l'énumération

Complexité \approx temps d'exécution d'un algorithme

En fonction de $n = \text{nb de sommets en entrée}$

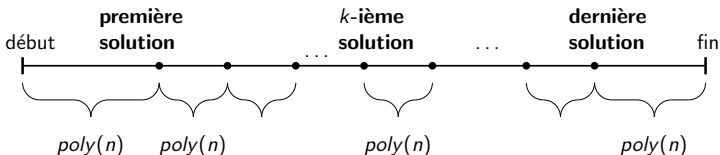
En optimisation : "efficace" = complexité **polynomiale** en n

En énumération: nombre **exponentiel** de solutions à lister
(ex: $3^{n/3}$ *stables max.* où $n = \text{nb de sommets}$)

\Rightarrow Bonne mesure de complexité?

1 À délai **polynomial**

Entrée de taille n



Complexité de l'énumération

Complexité \approx temps d'exécution d'un algorithme

En fonction de $n = \text{nb de sommets en entrée}$

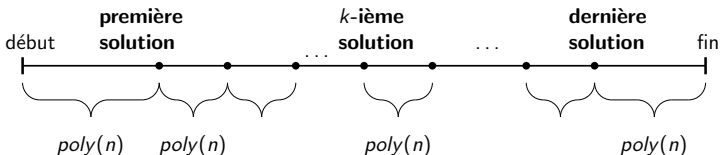
En optimisation : "efficace" = complexité **polynomiale** en n

En énumération: nombre **exponentiel** de solutions à lister
(ex: $3^{n/3}$ *stables max.* où $n = \text{nb de sommets}$)

\Rightarrow Bonne mesure de complexité?

- ① À délai **polynomial**
- ② Espace polynomial vs. espace exponentiel

Entrée de taille n



Objets intéressants à énumérer

- 1 Sommets d'un polytope (\approx solide convexe dans l'espace)

Objets intéressants à énumérer

- 1 Sommets d'un polytope (\approx solide convexe dans l'espace)
- 2 Polygones issus d'un ensemble de points dans \mathbb{R}^2

Objets intéressants à énumérer

- 1 Sommets d'un polytope (\approx solide convexe dans l'espace)
- 2 Polygones issus d'un ensemble de points dans \mathbb{R}^2
- 3 "**Motifs**" structurés: stables max., cliques max., ...

Objets intéressants à énumérer

- 1 Sommets d'un polytope (\approx solide convexe dans l'espace)
- 2 Polygones issus d'un ensemble de points dans \mathbb{R}^2
- 3 **"Motifs" structurés**: stables max., cliques max., ...
- 4 **II-"Réparations" minimales** du graphe

Objets intéressants à énumérer

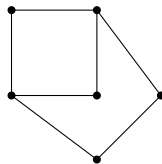
- 1 Sommets d'un polytope (\approx solide convexe dans l'espace)
- 2 Polygones issus d'un ensemble de points dans \mathbb{R}^2
- 3 **"Motifs" structurés**: stables max., cliques max., ...
- 4 **II-"Réparations" minimales** du graphe
- 5 Dominants minimaux
- 6 Arbres couvrants
- 7 Transversaux minimaux d'un hypergraphe

Réparations minimales

3 variantes

On veut satisfaire une propriété Π

Exemple: $\Pi = \text{sans } C_4 \text{ induit} \approx \text{sans carré}$

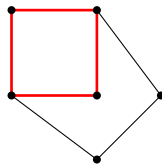


Réparations minimales

3 variantes

On veut satisfaire une propriété Π

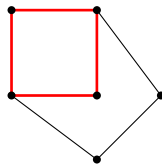
Exemple: $\Pi = \text{sans } C_4 \text{ induit} \approx \text{sans carré}$



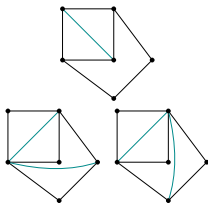
Réparations minimales

3 variantes

On veut satisfaire une propriété Π
Exemple: $\Pi =$ sans C_4 induit \approx sans carré



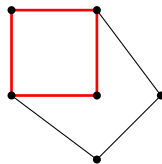
Réparation par
ajout d'arêtes



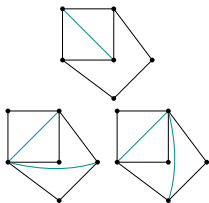
Réparations minimales

3 variantes

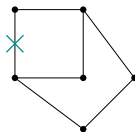
On veut satisfaire une propriété Π
Exemple: $\Pi =$ sans C_4 induit \approx sans carré



Réparation par
ajout d'arêtes



Réparation par
suppression
d'arêtes

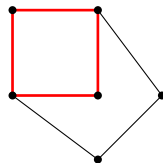


+ 3 autres

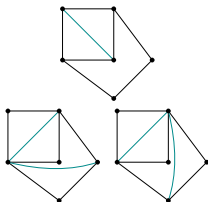
Réparations minimales

3 variantes

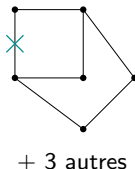
On veut satisfaire une propriété Π
Exemple: $\Pi =$ sans C_4 induit \approx sans carré



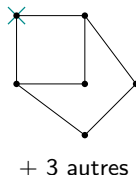
Réparation par
ajout d'arêtes



Réparation par
**suppression
d'arêtes**



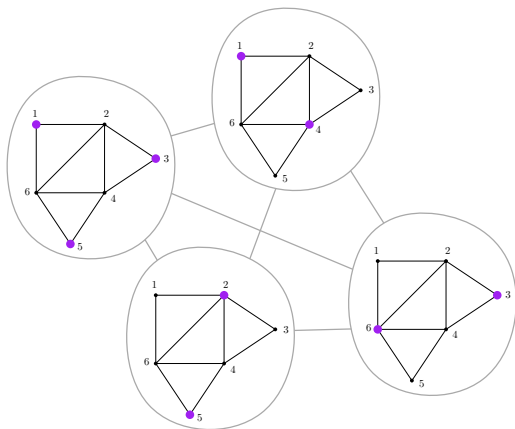
Réparation par
**suppr. de
sommets**



Principe d'un algo. d'énumération

- Parcourir l'espace des solutions

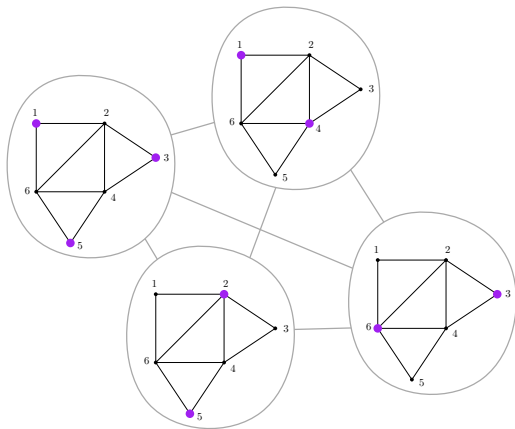
Exemple avec les
stables maximaux
(meta-)Graphe des
solutions



Principe d'un algo. d'énumération

- Parcourir l'espace des solutions
- en écrivant sur la sortie chaque solution une fois

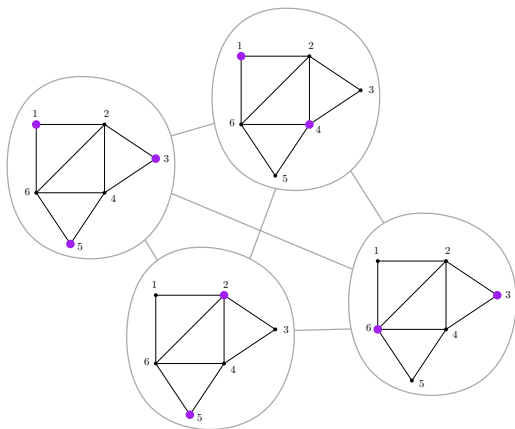
Exemple avec les
stables maximaux
(meta-)Graphe des
solutions



Principe d'un algo. d'énumération

- Parcourir l'espace des solutions
- en écrivant sur la sortie chaque solution une fois
- et **une seule** fois

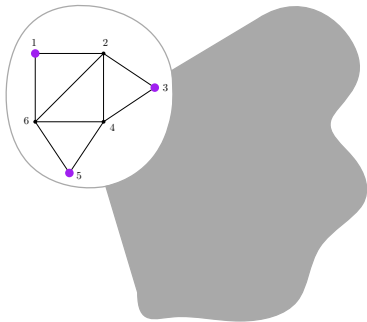
Exemple avec les
stables maximaux
(meta-)Graphe des
solutions



Principe d'un algo. d'énumération

- Parcourir l'espace des solutions
- en écrivant sur la sortie chaque solution une fois
- et **une seule** fois

Exemple avec les
stables maximaux
(*meta*-)Graphe des
solutions

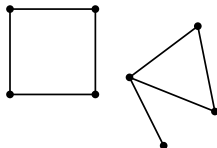


Cographe = sans P_4 induit

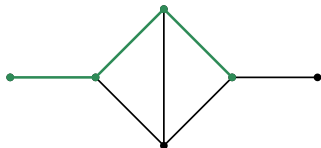
induit \approx sans arête parasite parmi les 4 sommets



P_4



\in Cographe



$G \notin$ Cographe

[Brosse, L., Limouzy, Mary, Pastor – 2020⁺]

Il existe un algorithme pour le problème :

Entrée: un graphe G

Sortie : énumération de toutes les réparations en cographe de G par suppression min. de sommets;

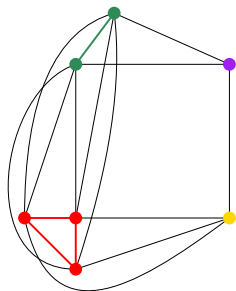
qui fonctionne en complexité **délai-polynomial** et espace exponentiel.

Cographe & jumeaux

Les cographe ont un ordre de construction par vrai ou faux jumeau.

Jumeaux : même voisinage (reliés aux mêmes sommets)

Deux jumeaux peuvent être reliés entre eux (vrais) ou pas (faux).



Cographe & jumeaux

Les cographe ont un ordre de construction par vrai ou faux jumeau.

Jumeaux : même voisinage (reliés aux mêmes sommets)

Deux jumeaux peuvent être reliés entre eux (vrais) ou pas (faux).

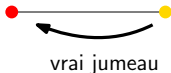


Cographe & jumeaux

Les cographe ont un ordre de construction par vrai ou faux jumeau.

Jumeaux : même voisinage (reliés aux mêmes sommets)

Deux jumeaux peuvent être reliés entre eux (vrais) ou pas (faux).

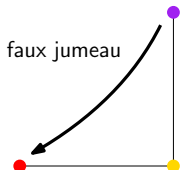


Cographe & jumeaux

Les cographe ont un ordre de construction par vrai ou faux jumeau.

Jumeaux : même voisinage (reliés aux mêmes sommets)

Deux jumeaux peuvent être reliés entre eux (vrais) ou pas (faux).

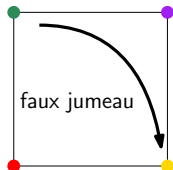


Cographe & jumeaux

Les cographe ont un ordre de construction par vrai ou faux jumeau.

Jumeaux : même voisinage (reliés aux mêmes sommets)

Deux jumeaux peuvent être reliés entre eux (vrais) ou pas (faux).

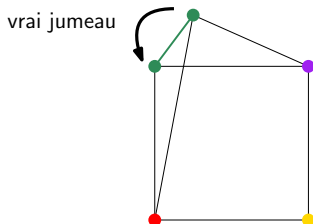


Cographe & jumeaux

Les cographe ont un ordre de construction par vrai ou faux jumeau.

Jumeaux : même voisinage (reliés aux mêmes sommets)

Deux jumeaux peuvent être reliés entre eux (vrais) ou pas (faux).

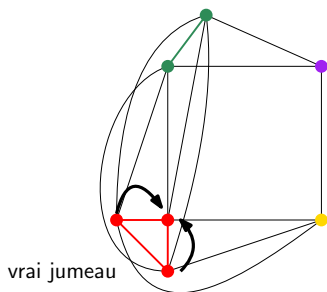


Cographe & jumeaux

Les cographe ont un ordre de construction par vrai ou faux jumeau.

Jumeaux : même voisinage (reliés aux mêmes sommets)

Deux jumeaux peuvent être reliés entre eux (vrais) ou pas (faux).

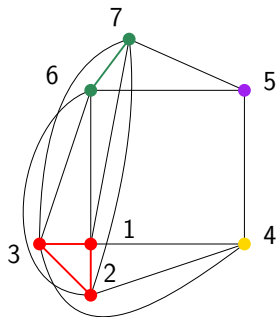


Cographe & jumeaux

Les cographe ont un ordre de construction par vrai ou faux jumeau.

Jumeaux : même voisinage (reliés aux mêmes sommets)

Deux jumeaux peuvent être reliés entre eux (vrais) ou pas (faux).

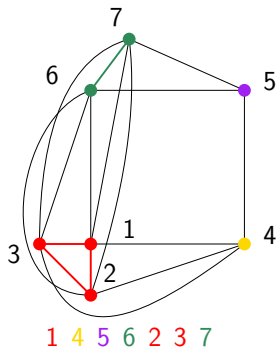


Cographe & jumeaux

Les cographe ont un ordre de construction par vrai ou faux jumeau.

Jumeaux : même voisinage (reliés aux mêmes sommets)

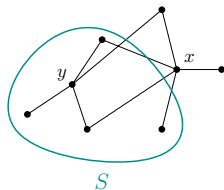
Deux jumeaux peuvent être reliés entre eux (vrais) ou pas (faux).



Ordre canonique de construction par jumeaux

Voisins dans le graphe des solutions

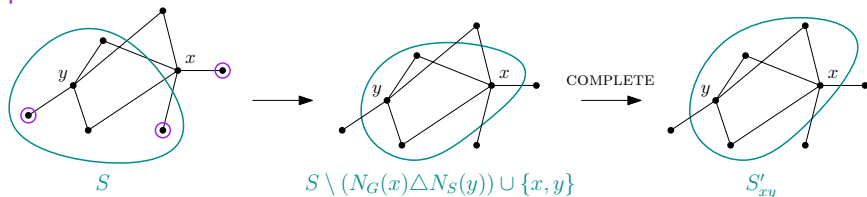
- G : graphe en entrée à réparer
- But : réparation en cographe par suppression min. de sommets
- S : sommets qui forment la solution actuelle
- Passer de S à une autre solution "proche" (voisine) ?



Voisins dans le graphe des solutions

- G : graphe en entrée à réparer
- But : réparation en cographes par suppression min. de sommets
- S : sommets qui forment la solution actuelle
- Passer de S à une autre solution "proche" (voisine) ?

Faire entrer x de force comme (faux) jumeau de y en enlevant les problèmes:



$$\text{Voisins}(S) = \bigcup_{y \in S, x \notin S} S'_{xy}$$

- 1 Optimisation
- 2 Énumération
- 3 Reconfiguration**
- 4 Conclusion

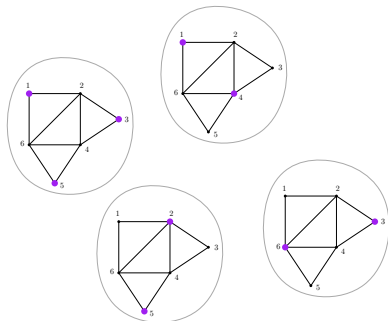
Étant donné :

- un **graphe** G
- un **problème** combinatoire
(\rightarrow définit ce qu'est une solution)
Ex: stables maximaux par inclusion
- une **règle de modification élémentaire** (reconfiguration)
d'une solution à une autre

... solution $\alpha \rightsquigarrow$ solution β ?

(peut-on passer de n'importe quelle solution α
à n'importe quelle solution β ?)

Si oui en combien d'étapes (au plus) ?



Étant donné :

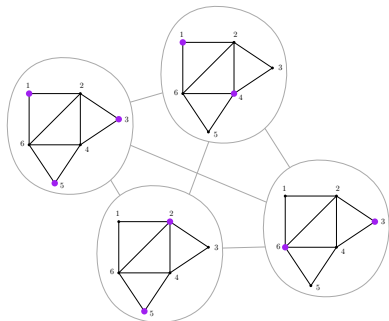
- un **graphe** G
- un **problème** combinatoire
(\rightarrow définit ce qu'est une solution)
Ex: stables maximaux par inclusion
- une **règle de modification élémentaire** (reconfiguration)
d'une solution à une autre

... solution $\alpha \rightsquigarrow$ solution β ?


(peut-on passer de n'importe quelle solution α
à n'importe quelle solution β ?)

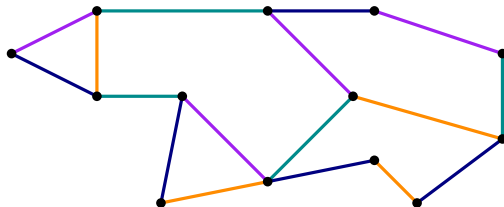
Si oui en combien d'étapes (au plus) ?

\rightarrow (*meta-*)Graphe des **solutions**




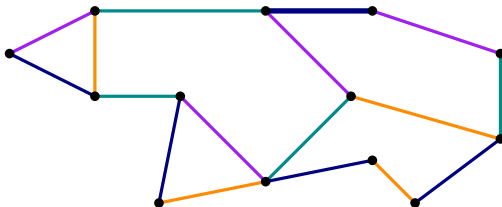
Recoloration (reconfig. de coloration)

- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes 
- Règle de modification élémentaire :




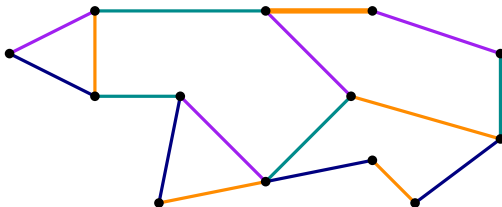
Recoloration (reconfig. de coloration)

- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes 
- Règle de modification élémentaire :
 - ① Recolorer une arête




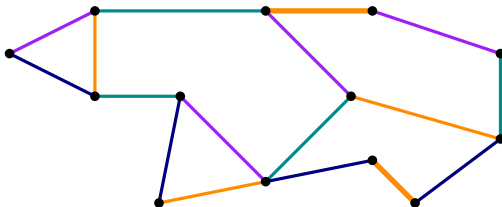
Recoloration (reconfig. de coloration)

- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes 
- Règle de modification élémentaire :
 - ① Recolorer une arête




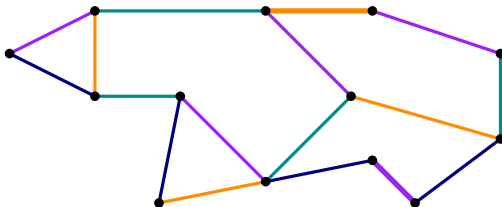
Recoloration (reconfig. de coloration)

- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes 
- Règle de modification élémentaire :
 - ① Recolorer une arête




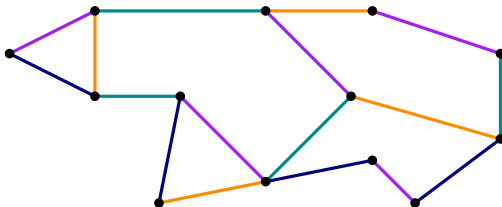
Recoloration (reconfig. de coloration)

- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes 
- Règle de modification élémentaire :
 - ① Recolorer une arête




Recoloration (reconfig. de coloration)

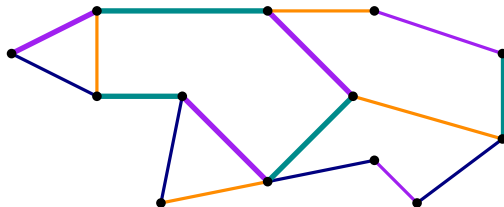
- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes 
- Règle de modification élémentaire :
 - ① Recolorer une arête




Recoloration (reconfig. de coloration)

- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes 
- Règle de modification élémentaire :

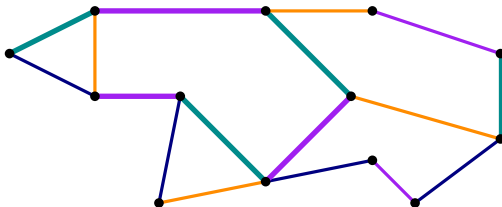
② Changement de Kempe le long d'une composante bicolor




Recoloration (reconfig. de coloration)

- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes 
- Règle de modification élémentaire :

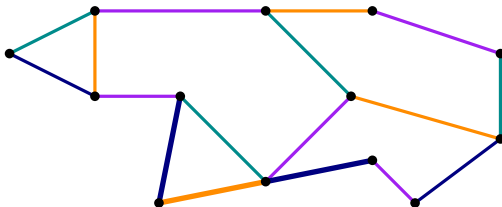
② Changement de Kempe le long d'une composante bicolor




Recoloration (reconfig. de coloration)

- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes 
- Règle de modification élémentaire :

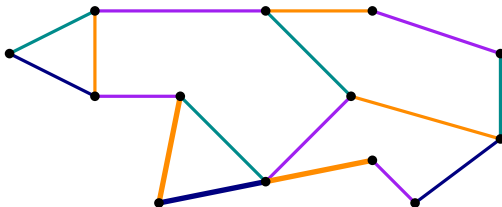
② Changement de Kempe le long d'une composante bicolor



Recoloration (reconfig. de coloration)

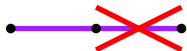
- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes 
- Règle de modification élémentaire :

② Changement de Kempe le long d'une composante bicolor

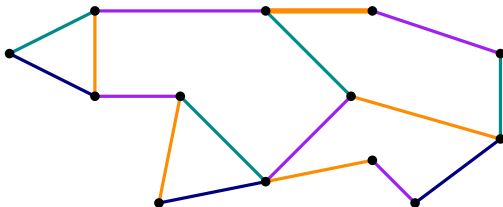


Recoloration (reconfig. de coloration)

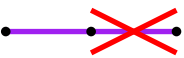
- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes
- Règle de modification élémentaire :



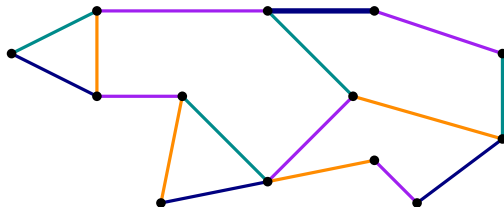
- ① Recolorer une arête
- ② Changement de Kempe le long d'une composante bicolor



Recoloration (reconfig. de coloration)

- Soit G un graphe
- Coloration propre des arêtes 
- Règle de modification élémentaire :

- ① Recolorer une arête
- ② Changement de Kempe le long d'une composante bicolore

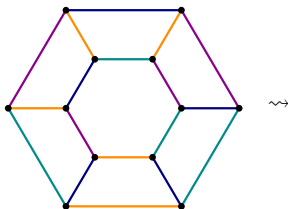


Théorème [Bonamy, Defrain, Klímošová, L., Narboni, 2023]

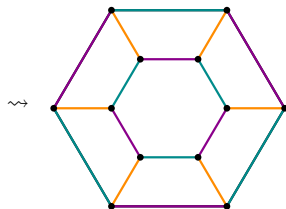
Soit G un graphe sans triangle, β une coloration propre optimale des arêtes de G (à $\chi'(G)$ couleurs), et un entier $k > \chi'(G)$.
Toute k -coloration propre des arêtes α peut être reconfigurée en β .

En fait on peut supposer : G Δ -régulier, $\chi'(G) = \Delta$, $k = \Delta + 1$

α (départ) \rightsquigarrow
 α



\rightsquigarrow β (cible)
 β

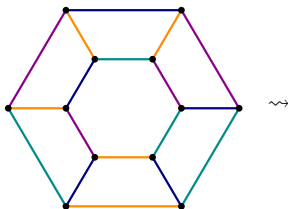


Théorème [Bonamy, Defrain, Klimošová, L., Narboni, 2023]

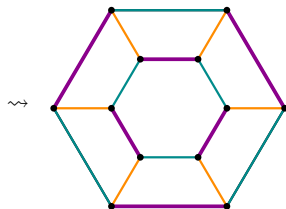
Soit G un graphe sans triangle, β une coloration propre optimale des arêtes de G (à $\chi'(G)$ couleurs), et un entier $k > \chi'(G)$.
Toute k -coloration propre des arêtes α peut être reconfigurée en β .

En fait on peut supposer : G Δ -régulier, $\chi'(G) = \Delta$, $k = \Delta + 1$

α (départ) \rightsquigarrow
 α



\rightsquigarrow β (cible)
 β

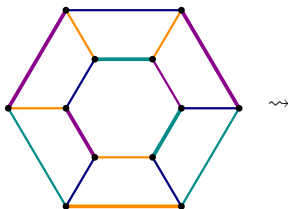


Théorème [Bonamy, Defrain, Klimošová, L., Narboni, 2023]

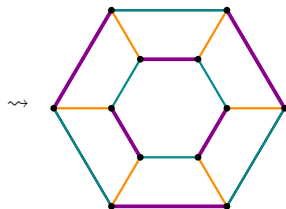
Soit G un graphe sans triangle, β une coloration propre optimale des arêtes de G (à $\chi'(G)$ couleurs), et un entier $k > \chi'(G)$.
Toute k -coloration propre des arêtes α peut être reconfigurée en β .

En fait on peut supposer : G Δ -régulier, $\chi'(G) = \Delta$, $k = \Delta + 1$

α (départ) \rightsquigarrow
 α



\rightsquigarrow β (cible)
 β

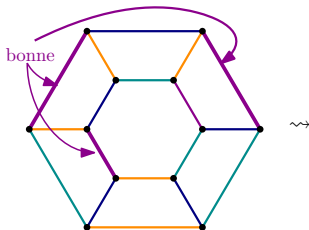


Théorème [Bonamy, Defrain, Klimošová, L., Narboni, 2023]

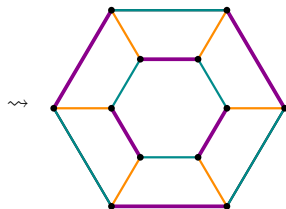
Soit G un graphe sans triangle, β une coloration propre optimale des arêtes de G (à $\chi'(G)$ couleurs), et un entier $k > \chi'(G)$.
Toute k -coloration propre des arêtes α peut être reconfigurée en β .

En fait on peut supposer : G Δ -régulier, $\chi'(G) = \Delta$, $k = \Delta + 1$

α (départ) \rightsquigarrow
 α



$\rightsquigarrow \beta$ (cible)
 β

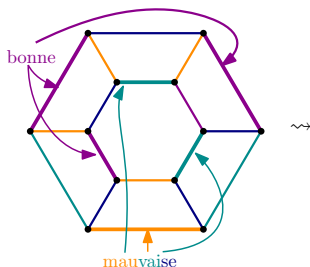


Théorème [Bonamy, Defrain, Klimošová, L., Narboni, 2023]

Soit G un graphe sans triangle, β une coloration propre optimale des arêtes de G (à $\chi'(G)$ couleurs), et un entier $k > \chi'(G)$.
Toute k -coloration propre des arêtes α peut être reconfigurée en β .

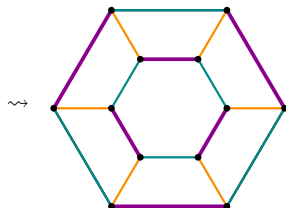
En fait on peut supposer : G Δ -régulier, $\chi'(G) = \Delta$, $k = \Delta + 1$

α (départ) \rightsquigarrow
 α



\rightsquigarrow

\rightsquigarrow β (cible)
 β



Théorème [Bonamy, Defrain, Klimošová, L., Narboni, 2023]

Soit G un graphe sans triangle, β une coloration propre optimale des arêtes de G (à $\chi'(G)$ couleurs), et un entier $k > \chi'(G)$.
Toute k -coloration propre des arêtes α peut être reconfigurée en β .

En fait on peut supposer : G Δ -régulier, $\chi'(G) = \Delta$, $k = \Delta + 1$

α (départ) $\rightsquigarrow \alpha'$ couleur 1 positionnée comme la cible $\rightsquigarrow \beta$ (cible)

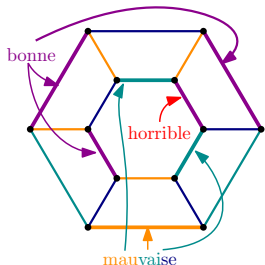


Théorème [Bonamy, Defrain, Klimošová, L., Narboni, 2023]

Soit G un graphe sans triangle, β une coloration propre optimale des arêtes de G (à $\chi'(G)$ couleurs), et un entier $k > \chi'(G)$.
Toute k -coloration propre des arêtes α peut être reconfigurée en β .

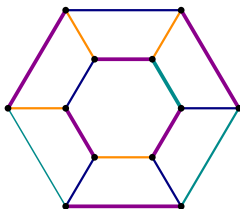
En fait on peut supposer : G Δ -régulier, $\chi'(G) = \Delta$, $k = \Delta + 1$

α (départ) \rightsquigarrow
 α



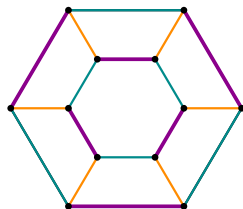
\rightsquigarrow

α'



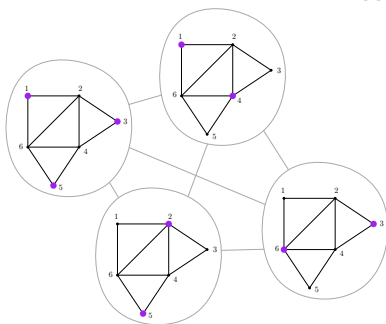
\rightsquigarrow

\rightsquigarrow β (cible)
 β



Énumération

Reconfiguration



Merci de votre attention !